Appunti di Analisi I

Anno accademico 2023-2024

Simon Milan Toth

Questa opera è pubblicata in base al regolamento della licenza Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License. Questo materiale può essere copiato e ridistribuito in qualsiasi mezzo o formato e può essere remixato, trasformato ed espanso con rispetto ai termini di attribuzione, condivisione allo stesso modo e scopo non commerciale.

Questa opera è stata progettata e scritta in LaTeX utilizzando Overleaf in formato cartaceo A4, in modo da ridurre le risorse necessarie per la stampa. Questa opera è disponibile gratuitamente tramite The Internet Archive.

PROPRIETÀ PRELIMINARIE

LOGARITMI

1) $\log_c a + \log_c b = \log_c (a \cdot b)$
2) $\log_c a - \log_c b = \log_c \left(\frac{a}{b}\right)$
3) $n \cdot \log_c a = \log_c a^n$
4) $\log_a (b) = \frac{\log_c (b)}{\log_c (a)}$
5) $\log_a (b) = \frac{1}{\log_b (a)}$

ESPONENZIALI

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
3) $(a^m)^n = a^{mn}$
4) $\frac{1}{a^m} = a^{-m}$
5) $a^m \cdot b^m = (ab)^m$
6) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$
7) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
8) $a^{\log_a b} = b$

TRIGONOMETRIA

1) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \text{sen}(\alpha)$ $\quad$ $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$
2) $\text{sen}(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta \pm \text{sen}\,\beta \cos\alpha$
$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \text{sen}\,\alpha\, \text{sen}\,\beta$
3) $\text{sen}\,\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ $\quad$ $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\text{sen}^2\alpha}$

VALORI GONIOMETRICI

	sen x	cos x	tan x	cotg x
0	0	1	0	∞
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0
π	0	-1	0	∞
$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	∞	0
2π	0	1	0	∞

FORMULE PER NUMERI COMPLESSI

$z = a + ib \quad a = \mathrm{Re}(z) \quad b = \mathrm{Im}(z) \quad i = \sqrt{-1} \iff i^2 = -1$

$\bar{z} = a - ib \quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \quad a = \rho\cos\theta \quad b = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \quad |z| = \rho$

$\mathrm{Arg}(z) = \theta : \theta \in [0, 2\pi)$

$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1 + \theta_2)) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$z^n = \rho^n (\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$z_k = \sqrt[n]{\rho}\,(\cos\theta_k + i\,\mathrm{sen}\,\theta_k) \quad \theta_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$z^2 = \delta \iff z = \pm\sqrt{\delta} \cdot i$

LIMITI NOTEVOLI

$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}\,x}{x} = 1 \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{tg}\,x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$

$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{senh}\,x}{x} = 1 \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cosh x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{sen}\,a_n}{a_n} = 1 \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{tg}\,a_n}{a_n} = 1$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1 \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{\log(1 + a_n)}{a_n} = 1 \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{(1 + a_n)^\alpha - 1}{a_n} = \alpha$

ASINTOTI

① Asintoto verticale $x = x_0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

② Asintoto orizzontale $y = q \iff \lim_{x \to \infty} f(x) = q$

③ Asintoto obliquo $y = mx + q \iff \lim_{x \to \infty} f(x) - (mx + q) = 0$

DERIVATE NOTEVOLI

1) $f(x) = k \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}$
2) $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
3) $f(x) = x^s \Rightarrow f'(x) = s x^{s-1} \quad \forall s \in \mathbb{R}$
4) $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \log a$
5) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
6) $f(x) = \log x \Rightarrow f'(x) = 1/x$
7) $f(x) = |x| \Rightarrow f'(x) = |x|/x$
8) $f(x) = \operatorname{sen} x \Rightarrow f'(x) = \cos x$
9) $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$
10) $f(x) = \operatorname{tg} x \Rightarrow f'(x) = 1/\cos^2 x$
11) $f(x) = \operatorname{cotg} x \Rightarrow f'(x) = -1/\operatorname{sen}^2 x$
12) $f(x) = \operatorname{arcsen} x \Rightarrow f'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$
13) $f(x) = \arccos x \Rightarrow f'(x) = -1/\sqrt{1-x^2}$
14) $f(x) = \operatorname{arctg} x \Rightarrow f'(x) = 1/1+x^2$
15) $f(x) = \operatorname{arcotg} x \Rightarrow f'(x) = -1/1+x^2$
16) $f(x) = \operatorname{senh} x \Rightarrow f'(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
17) $f(x) = \cosh x \Rightarrow f'(x) = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

REGOLE DI DERIVAZIONE

1) $af + bg \Rightarrow af' + bg'$
2) $f \cdot g \Rightarrow f'g + fg'$
3) $f \cdot g \cdot h \Rightarrow f'gh + fg'h + fgh'$
4) $f/g \Rightarrow f'g - fg'/g^2$
5) $f^g \Rightarrow f^g\left(\frac{f'g}{f} + \log(f)\, g'\right)$
6) $f \circ g \Rightarrow g' \cdot f'(g)$
7) $\log f \Rightarrow f'/f$
8) $\log(f/g) \Rightarrow g(f'g - fg')/g^2 \,/\, f$
9) $a^f \Rightarrow \log(a) \cdot a^f \cdot f'$
10) $e^f \Rightarrow e^f \cdot f'$

TAVOLA DEGLI SVILUPPI DI TAYLOR PER $x \to x_0 = 0$

1) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$

2) $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$

3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$

4) $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)$

5) $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + o(x^5)$

6) $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + o(x^5)$

7) $\operatorname{arcsen} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$

8) $\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$

9) $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7)$

10) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3}x^3 + o(x^3)$

11) $\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$

12) $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6)$

INTEGRALI NOTEVOLI

$\int f'(x)\,dx = f(x) + c$ $\quad$ $\int a\,dx = ax + c$ $\quad$ $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$

$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$ $\quad$ $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + c$ $\quad$ $\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + c$

$\int (1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + c$

$\int (1+\operatorname{cotg}^2 x)\,dx = \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + c$

$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + c$ $\quad$ $\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + c$

$\int e^x dx = e^x + c$ $\quad$ $\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + c$ $\quad$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$

REGOLE DI INTEGRAZIONE

$\int f(x)\,dx = F(x) + c \iff F'(x) = f(x)$

$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ $\quad$ $\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$

$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx$

$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \lim_{x\to b} F(x) - \lim_{x\to a} F(x)$

INTEGRALI RICONDUCIBILI

$\int f^n(x)\cdot f'(x)\,dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$ $\quad$ $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + c$

$\int f'(x)\cdot \cos(f(x))\,dx = \operatorname{sen}(f(x)) + c$ $\quad$ $\int f'(x)\cdot \operatorname{sen}(f(x))\,dx = -\cos(f(x)) + c$

$\int e^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx = e^{f(x)} + c$ $\quad$ $\int a^{f(x)}\cdot f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\log_e a} + c$

$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}\,dx = \begin{cases} \operatorname{arcsen} f(x) + c \\ -\arccos f(x) + c \end{cases}$ $\quad$ $\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\,dx = \operatorname{arctg} f(x) + c$

2023/09/26 ANALISI I

NUMERI REALI

$\mathbb{N}$ ⇒ numeri naturali ⇒ $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$
$\mathbb{Z}$ ⇒ numeri interi relativi ⇒ $\{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
$\mathbb{Q}$ ⇒ numeri razionali ⇒ $\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{R} \setminus \{n = 0\}\}$

È inutile dire che ci sono numeri (a parte quelli immaginari) che non sono compresi in questi tre insiemi numerici, in quanto sono per definizione insiemi e non campi algebrici.
il campo algebrico che comprende tutti i numeri non-complessi $(\pi, e, \sqrt{2})$ si dice insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$. In realtà, esso non ha una definizione stretta, ma può essere solo circoscritta dai suoi assiomi o proprietà.

A) Assiomi algebrici
B) Assiomi d'ordine
C) Assioma di completezza

A) $\forall a, b \in \mathbb{R}$ siano definite due operazioni algebriche:
$a + b = c \in \mathbb{R}$ $a \cdot b = d \in \mathbb{R}$

A1) Commutativa $a + b = b + a \wedge b \cdot a = a \cdot b$
A2) Associativa $(a+b)+c = (a+c)+b = (b+c)+a$
A3) Distributiva $(a+b) \cdot c = ac + bc$
A4) Elemento neutro $\forall a \in \mathbb{R} \; \exists x \in \mathbb{R} : a + x = a \vee a \cdot x = a$
A5) Opposto $\forall a \in \mathbb{R} \; \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$
A6) Reciproco $\forall a \in \mathbb{R} \; \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R} : a \cdot \frac{1}{a} = 1$

Se questi assiomi sono verificati in I, I si dice campo algebrico.
Da questi assiomi seguono le usuali regole algebriche fondamentali.

1) $a + c = b + c \Rightarrow a = b$
2) $a \cdot 0 = 0$
3) $a \cdot (-1) = -a$
4) $a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b \quad \forall c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
5) $a - b = a + (-b)$
6) $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b} \quad \forall b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

B) Sia definita in $\mathbb{R}$ una relazione d'ordine totale detta minore o uguale, indicata con $\leq$, una relazione fra numeri reali che verifica le seguenti proprietà.

d'ordine

B1) Riflessiva $\forall a \in \mathbb{R}$ $a \leq a$

B2) Antisimmetrica $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$

B3) Transitiva $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$

Totale

B4) Dicotomia $\forall a, b \in \mathbb{R}$ $a \geq b \vee a \leq b$

B5) $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$

B6) $\forall a, b \in \mathbb{R} \wedge \forall c \geq 0 \in \mathbb{R}$ $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

A partire dalla relazione $\leq$ (cui è una relazione d'ordine totale), si definiscono altre relazioni, quali $\geq$; $>$; $<$, fra cui $>$ e $<$ non sono relazioni d'ordine totale o non-totale.

Da questi seguono le usuali proprietà algebriche.

1) $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c \quad \forall c \leq 0$
2) $a \geq 0 \Rightarrow -a \leq 0$
3) $a > 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R}^+$, detto positivo
4) $a < 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R}^-$, detto negativo
5) $a \geq 0 \Rightarrow$ detto non-negativo
6) $a \leq 0 \Rightarrow$ detto non-positivo

2023/09/27 ANALISI I

ASSIOMA DI COMPLETEZZA (DEDEKIND)

Se A e B sono sottoinsiemi non-vuoti di $\mathbb{R}$ e sono tali che $\forall a \in A, \forall b \in B$
$a \leq b \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b$, ove c è detto elemento separatore di A e B.

Esempio:

$A = \{a \in \mathbb{R}^+ : a^2 < 2\}$ $\qquad$ $B = \{b \in \mathbb{R}^+ : b^2 > 2\}$

$\Rightarrow a \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$?

Dimostrazione per assurdo:

$\exists a_0 \in A, \exists b_0 \in B : a_0 > b_0$

$a_0 > 0 \Rightarrow a_0^2 > 0 \Rightarrow a_0^2 > a_0 b_0$

$\Rightarrow 2 > a_0 b_0 \Rightarrow a_0 b_0 > b_0^2 \Rightarrow a_0 b_0 > 2$

impossibile $\qquad$ C.V.D.

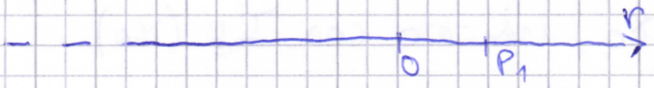
Dato l'assioma di completezza e la dimostrazione per assurdo, $\exists! c \in \mathbb{R}^+ : c^2 = 2$ ed esso viene denotato con $\sqrt{2}$.

Possiamo definire $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $\sqrt{x}$ allo stesso modo.

RETTA REALE

Una retta reale è una retta su cui sono convenzionati tre elementi:

1) Orientamento
2) Origine
3) Unità di misura



$d(P_1, O) = 1$

Si definisce la funzione ascissa $x : r \to \mathbb{R}$ tale che
$\forall P \in r^+ \quad x(P) = d(P, O) \quad \vee \quad \forall P \in r^- \quad x(P) = -d(P, O)$
$\vee \quad P \equiv O \Rightarrow d(P, O) = 0$.

La funzione ascissa è biunivoca, detta anche biettiva.

① Iniettiva $\Rightarrow P \neq Q \Rightarrow x(P) \neq x(Q)$

② Suriettiva $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{R} \quad \exists P_a \in r : x(P_a) = a = d(P_a, O)$

Date queste due proprietà, siamo soliti rappresentare i numeri reali con i loro punti corrispondenti sulla retta reale.

La funzione inversa dell'ascissa è x^{-1}, cui associa ad ogni ascissa $x \in \mathbb{R}$ un punto P_x sulla retta reale. Ovviamente, $x^{-1}(x(P(x))) = P_x$.

VALORE ASSOLUTO

$$d(P_a, O) = \begin{cases} a & \forall a \geq 0 \\ -a & \forall a < 0 \end{cases} = |a| \quad \text{(valore assoluto di numero reale)}$$

In generale, se $a, a_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow d(P_a, P_0) = |a - a_0|$.
Il valore assoluto, dunque, verifica le seguenti proprietà.

1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \geq 0$
2) $\forall \delta > 0 \quad |x| > \delta \quad \Rightarrow \quad -\delta < x < \delta$
3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad -|x| \leq x \leq |x|$
4) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x+y| \leq |x| + |y| \quad \wedge \quad ||x| - |y|| \leq |x-y|$ (disuguaglianza triangolare)
5) $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |xy| = |x| \cdot |y|$

INTERVALLI

Si dice intervallo limitato un insieme delle seguenti forme.

1) Chiuso $\Rightarrow a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \quad [a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
2) Aperto $\Rightarrow a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \quad (a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
3) Semiaperto $\Rightarrow a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \quad [a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
4) Semiaperto $\Rightarrow a, b \in \mathbb{R} : a \leq b \quad (a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

Se $a = b$, si ha un intervallo degenere $[a,a] = \{a\}$, $(a,a) = \emptyset$, $(a,a] = \emptyset$.
L'intervallo circolare $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ è detto intorno di raggio δ e di centro x_0, indicato con $I_\delta(x_0)$.

Si dice intervallo illimitato un insieme delle seguenti forme.

1) $[a, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
2) $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
3) $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
4) $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$
5) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

TEOREMA DI CARATTERIZZAZIONE DEGLI INTERVALLI

$I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo se e solo se
$\forall a, b \in I : a \leq b \quad (a,b) \subseteq I$

Ovvero se e solo se esso non presenta buchi, salti, e/o assenze.
Gli intervalli sono gli unici sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ con questa proprietà.

2023/09/29 ANALISI I

TEOREMA DI INCOMPLETEZZA RAZIONALE

$\nexists c \in \mathbb{Q} : c > 0 \land c^2 = 2$

Questo implica che $\mathbb{Q}$ non verifica l'assioma di completezza.

Dimostrazione per assurdo:

$\exists c \in \mathbb{Q} : c > 0 \land c^2 = 2$

$\Rightarrow c = \frac{m}{n}$ per $m, n \in \mathbb{N}$ primi, in particolare non entrambi pari

$\Rightarrow c^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow$ entrambi numeri pari

CONTRADDIZIONE ⇒ C.V.D

MAGGIORANTE, MASSIMO, ESTREMO SUPERIORE

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non-vuoto

Si dice che $L \in \mathbb{R}$ è un maggiorante di A se $L \geq a \quad \forall a \in A$
Si dice che $l \in \mathbb{R}$ è un minorante di A se $l \leq a \quad \forall a \in A$.

Si dice che A è superiormente limitato se $\exists L \in \mathbb{R} : L \geq a \quad \forall a \in A$.
Si dice che A è inferiormente limitato se $\exists l \in \mathbb{R} : l \leq a \quad \forall a \in A$.
Si dice che A è limitato se esso è limitato sia superiormente sia inferiormente.
Tutti gli intervalli limitati sono anche insiemi limitati. In teoria, solo $(-\infty, +\infty)$ non ha né maggiorante né minorante.

Si dice massimo di A un maggiorante di A che appartiene ad A.
Si dice minimo di A un minorante di A che appartiene ad A.

Si dice estremo superiore di A il più piccolo dei maggioranti di A.
Si dice estremo inferiore di A il più grande dei minoranti di A.
Questi estremi $\sup(A)$, $\inf(A)$ spesso coincidono con $\max(A)$, $\min(A)$ rispettivamente, ma non sono per forza inclusi in A.

TEOREMA DI UNICITA' DEL MASSIMO

Se esistono, $\max(A)$ e $\min(A)$ sono unici.

Dimostrazione per assurdo:

Siano M_1, M_2 due massimi di A.

$$\Rightarrow \begin{cases} M_1 \geq a \quad \forall a \in A \\ M_1 \in A \end{cases} \cup \begin{cases} M_2 \geq a \quad \forall a \in A \\ M_2 \in A \end{cases}$$

$\Rightarrow M_1 \geq M_2 \land M_1 \leq M_2 \Rightarrow M_1 = M_2$ C.V.D

TEOREMA

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è costituito da un numero finito di elementi (ovvero esso è un insieme finito), esso ammette sia massimo sia minimo.

TEOREMA DI ESISTENZA DELL'ESTREMO

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ non-vuoto è superiormente limitato, esso ammette $\sup(A)$.

Dimostrazione:

A sup. limitato $\quad B = \{\text{maggioranti di } A\} = \{b \in \mathbb{R} : b \geq a \ \forall a \in A\}$

A è non-vuoto per ipotesi, B è non-vuoto dato che A è sup. limitato.

Dall'assioma di completezza $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

$\Rightarrow c$ è maggiorante di $A \Rightarrow c \in B \Rightarrow c$ minorante di B

$\Rightarrow c = \min(B) = \sup(A)$ C.V.D.

2023/10/03 ANALISI I

TEOREMA DI PROPRIETÀ ARCHIMEDEA

$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} : n > x \Rightarrow \mathbb{N}$ non è superiormente limitato

Dimostrazione per assurdo:

$\exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \ n \leq x_0$

$\Rightarrow \mathbb{N}$ è superiormente limitato

$\Rightarrow$ Per il Teorema di esistenza dell'estremo superiore $\exists \sup(\mathbb{N}) = M \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow M \geq n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow k, k+1, k+2 \in \mathbb{N} \Rightarrow k+1 \leq M \Rightarrow k \leq M-1$

$\Rightarrow M-1$ maggiorante di $\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ IMPOSSIBILE, M dev'essere il più piccolo dei maggioranti di $\mathbb{N}$.

C.V.D.

COROLLARIO ARCHIMEDEO

Se $A \subseteq \mathbb{N}$ è superiormente limitato, allora A è finito.

In particolare, A ammette massimo e minimo.

Dimostrazione:

Per il T. di esistenza dell'estremo superiore, $\exists M = \sup(A) \in \mathbb{R}$.

Per il T. della proprietà archimedea, $\exists n \in \mathbb{N} : M < n$.

$\Rightarrow \forall a \in A \ a \leq M < n \Rightarrow A \subseteq \mathbb{N} \land a < n \in \mathbb{N} \ \forall a \in A$

$\Rightarrow A$ ha al massimo $(n-1)$ elementi totali. C.V.D.

COROLLARIO DELLA PARTE INTERA

$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists! n \in \mathbb{Z} : n \leq x \leq n+1 \qquad n = [x]$ parte intera di x

Dimostrazione:

$x > 0 \quad A = \{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : n \leq x\}$

A è superiormente limitato $\Rightarrow$ Per il corollario archimedeo, A è finito.

$\Rightarrow n+1 > x \land n \leq x \Rightarrow n \leq x < n+1$ C.V.D.

$x \leq 0 \Rightarrow n_0 \leq 0 \Rightarrow -n_0 - 1 < x \leq -n_0 \Rightarrow n \leq x < n+1$ C.V.D.

La funzione parte intera $[x] \quad x \mapsto [x]$ è costante a tratti.

COROLLARIO DI DENSITÀ DEI RAZIONALI

$\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y$

PRINCIPIO DI INDUZIONE

L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ verifica due proprietà

a) $1 \in \mathbb{N}$ b) $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$

Un insieme che verifica queste proprietà si dice insieme induttivo.

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}$ sono tutti insiemi induttivi.

Per definizione, se A è induttivo, allora $\mathbb{N} \subseteq A$. Ovvero $\mathbb{N}$ è il più piccolo insieme induttivo in $\mathbb{R}$. Perciò, $A \subseteq \mathbb{N}$ è induttivo vuol dire che $A = \mathbb{N}$.

Se $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia di proposizioni che dipende da $n \in \mathbb{N}$, verifica

1) P_1 è vero

2) P_k è vero $\Rightarrow P_{k+1}$ vero $\Rightarrow P_n$ vero $\forall n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione:

$A = \{n \in \mathbb{N} : P_n \text{ vero}\} \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow A$ è induttivo

1) $1 \in A$ poichè P_1 è vero per ipotesi

2) $k \in A \Rightarrow k+1 \in A$ per ipotesi $\Rightarrow A = \mathbb{N}$ C.V.D.

NUMERI COMPLESSI

Nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ non è detto che ogni equazione ammetta soluzioni reali. Per dare soluzioni a queste equazioni, consideriamo numeri cui $\notin \mathbb{R}$ ma $\in \mathbb{C}$.

Un numero complesso z è una coppia ordinata di numeri reali.

L'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ è un insieme dotato di somma e prodotto.

$$z = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

1) Somma $\Rightarrow z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

2) Prodotto $\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$

$\mathbb{C}$ è un campo algebrico poichè verifica le proprietà necessarie.

1) Elemento neutro somma $\Rightarrow (0,0)$

2) Elemento neutro prodotto $\Rightarrow (1,0)$

3) Opposto $\Rightarrow -z = (-a, -b)$

4) Reciproco $\Rightarrow \frac{1}{z} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

Se $a \in \mathbb{R}$, a viene identificato col numero complesso $(a,0) \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

I numeri della forma $(0,b)$ sono detti immaginari puri, denotati con ib, ove i è l'unità immaginaria $i = \sqrt{-1} = (0,1)$ che non ha soluzione in $\mathbb{R}$.

2023/10/04 ANALISI I

FORMA ALGEBRICA DI NUMERO COMPLESSO

La forma algebrica di un numero complesso è la forma più conveniente per le operazioni più semplici.

$z = a + ib \qquad a = \mathrm{Re}(z),\ b = \mathrm{Im}(z),\ i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$

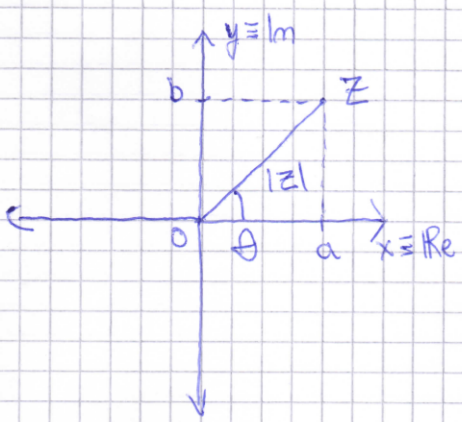
Le operazioni si adoperano tali quali, ma ricordati che $i^2 = -1$!
Ciò vuol dire che ti ridurrai sempre alla forma di parte reale e parte immaginaria, talvolta nulle.

$\bar{z} = a - ib$ è detto coniugato di z

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ è detto modulo di z

FORMA CARTESIANA DI NUMERO COMPLESSO

Se $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, allora $\mathbb{C}$ è in essenza il piano cartesiano.



Tale piano si denomina il piano complesso di Argan-Gauss.
In particolare, il modulo $|z|$ ha proprietà particolari e distinte.

1) $|z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
2) $|z| = 0 \iff z = 0$
3) $|z+w| \leq |z| + |w| \qquad |zw| = |z| \cdot |w|$
4) $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z| \ \wedge\ |\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$

   $|z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$

Questa rappresentazione planare permette la forma trigonometrica di z.

$|z| = \rho \quad \Rightarrow \quad a = \rho\cos\theta \quad b = \rho \,\mathrm{sen}\,\theta$

$\Rightarrow \quad z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$

θ è detto un argomento di z. Se θ è un argomento di z, lo è anche $\theta + 2k\pi$.
Si dice argomento principale di z l'unico $\mathrm{Arg}(z) \in [0, 2\pi)$.

FORMULE DI DE MOIVRE

1) $z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2)) \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

2) $z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta)) \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$

2023/10/06 ANALISI I

RADICI N-ESIME DI NUMERI COMPLESSI

Dato $n \in \mathbb{N}$, $w \in \mathbb{C}$, si dice radice n-esima di w un numero $z \in \mathbb{C}$ tale che $z^n = w$.

Se $w = R(\cos\Theta + i\,\text{sen}\,\Theta)$, $z = \rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ è una radice n-esima di w, allora dalla formula di De Moivre ...

$z^n = w \iff (\rho(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta))^n = R(\cos\Theta + i\,\text{sen}\,\Theta)$

$\Rightarrow \rho^n(\cos(n\theta) + i\,\text{sen}(n\theta)) = R(\cos\Theta + i\,\text{sen}\,\Theta) \Rightarrow \begin{cases} \rho^n = R \\ n\theta = \Theta + 2k\pi \end{cases}$

Le radici n-esime distinte di $w = R(\cos\Theta + i\,\text{sen}\,\Theta)$ sono esattamente n in quantità e sono date da $z_k = \sqrt[n]{R}(\cos\theta_k + i\,\text{sen}\,\theta_k)$, dove $\theta_k = \frac{\Theta + 2k\pi}{n}$ per $k \in \mathbb{Z}$.

In generale, si ha che le radici n-esime di w con $n \geq 3$ si dispongono sui vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[n]{R}$ e centro l'origine.

In generale, le soluzioni di $z^2 = \delta$ con $\delta \in \mathbb{R}^-$ sono $z = \pm\sqrt{-\delta}\,i$.

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA E LIMITE

Ogni equazione algebrica intera di grado $n \in \mathbb{N}$ ammette esattamente n soluzioni complesse, contate con la loro molteplicità algebrica.

Si dice successione numerica una funzione definita in $\mathbb{N}$ a valori in $\mathbb{R}$: $n \in \mathbb{N} \mapsto a_n \in \mathbb{R}$.

Data una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si dice che ha limite $\ell \in \mathbb{R}$ per $n \to +\infty$, e scriveremo $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$, se è verificata la condizione $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$.

Tieni in mente che, per definizione, non ci interessa cosa succede alla funzione o alla successione nel punto a cui tende n, ma soltanto cosa succede alla funzione nell'intorno ristrettissimo di raggio ε escluso il centro stesso.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

2023/10/10 ANALISI I

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE

Se una successione ammette limite, esso è unico.

Dimostrazione per assurdo:

$\lim_{n\to+\infty} a_n = l_1 \vee l_2 \qquad l_1 \neq l_2$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N} : |a_n - l_1| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_2 \in \mathbb{N} : |a_n - l_2| < \varepsilon$

$\Rightarrow |a_n - l_1| < \varepsilon \ \wedge \ |a_n - l_2| < \varepsilon$

$\Rightarrow |l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \leq |l_1 - a_n| + |a_n - l_2|$

$\Rightarrow = |a_n - l_1| + |a_n - l_2| < 2\varepsilon \quad \Rightarrow$ n è sparito

$\Rightarrow 0 \leq |l_1 - l_2| < 2\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |l_1 - l_2| = 0 \quad \Rightarrow$ C.V.D.

TEOREMA DEL LIMITE NULLO

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0$, ed a_n si dice successione infinitesima.

Dimostrazione:

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : ||a_n|| = |a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$ C.V.D.

CONVERGENZA E DIVERGENZA

Si dice che una successione diverge positivamente per $n \to +\infty$ se...

$\forall M > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n > M \quad \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Si dice che una successione diverge negativamente per $n \to +\infty$ se...

$\forall M > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n < -M \quad \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Si dice che una successione converge per $n \to +\infty$ se...

$\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

Una successione si dice regolare se essa è convergente o divergente.

Se una successione non è regolare, essa si dice indeterminata.

Una successione si dice superiormente limitata se...

$\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \ \exists M \in \mathbb{R} : a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Una successione si dice inferiormente limitata se...

$\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \ \exists m \in \mathbb{R} : a_n \geq m \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Una successione si dice limitata se...

$\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \ \exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

TEOREMA CONVERGENZA-LIMITATEZZA

Ogni successione convergente è limitata. Non vale il vice-versa!

Dimostrazione:

$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$ Scegliamo $\varepsilon = 1$.

$\Rightarrow l-1 < a_n < l+1 \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow$ l'insieme $\{a_n : n \geq n_0\}$ è limitato

$\Rightarrow$ l'insieme $\{a_n : n < n_0\}$ è finito ed ammette minimo e massimo

$\Rightarrow m \leq a_n \leq M \quad \forall n \leq n_0$

$\Rightarrow$ Preso $\bar{m} = \min\{l-1, m\} \wedge \bar{M} = \max\{l+1, M\}$

$\Rightarrow \bar{m} \leq a_n \leq \bar{M} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ C.V.D.

PROPOSIZIONE LIMITE SINISTRO E DESTRO

Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione infinitesima $\wedge$ b_n è una successione limitata, allora $(a_n \cdot b_n)$ è infinitesima.

Si dice che $\lim_{n \to +\infty} a_n = l^+$ dove $l \in \mathbb{R}$ se...

$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \wedge \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n > l \quad \forall n \geq n_0$.

Si dice che $\lim_{n \to +\infty} a_n = l^-$ dove $l \in \mathbb{R}$ se...

$\lim_{n \to +\infty} a_n = l \wedge \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n < l \quad \forall n \geq n_0$.

2023/10/13 ANALISI I

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione tale che $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$ ed $\ell > 0$, allora $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n > 0 \quad \forall n \geq n_0$.

Dimostrazione:

Per definizione, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad 0 < \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

$\Rightarrow$ preso $\varepsilon = \frac{\ell}{2}$, $\quad a_n > \ell - \varepsilon = \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0 \quad \forall n \geq n_0$ C.V.D.

COROLLARIO DEL LIMITE CON SEGNO

Se a_n è tale che $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq \bar{n}$ ed $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$, allora $\ell \geq 0$.

Dimostrazione per assurdo:

$\ell < 0 \quad \Rightarrow$ Per la T. della permanenza del segno, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n < 0 \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow$ In contraddizione con $a_n \geq 0 \quad \forall n \geq \bar{n}$ C.V.D.

COROLLARIO LIMITI RELAZIONATI

Se a_n, b_n sono tali che $a_n \leq b_n \quad \forall n \geq \bar{n} \wedge \exists \lim_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, allora $a \leq b$.

Dimostrazione:

$c_n = b_n - a_n \quad : \quad c_n \geq 0 \quad \forall n \geq \bar{n}$

$\Rightarrow$ Per il corollario precedente, $\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} b_n - a_n = b - a \geq 0$ C.V.D.

TEOREMA DEI DUE CARABINIERI

Siano a_n, b_n, c_n tali che $a_n \leq b_n \leq c_n \quad \forall n \geq \bar{n}$.
Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \ell \in \mathbb{R}$, allora $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$.

Dimostrazione:

$\varepsilon > 0, \quad b_n \geq a_n \quad \forall n \geq \bar{n} \wedge \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \quad \exists n_1 \in \mathbb{N} : a_n > \ell - \varepsilon \quad \forall n \geq n_1$

$\Rightarrow \forall n \geq \max\{\bar{n}, n_1\} \quad b_n \geq a_n > \ell - \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq \max\{\bar{n}, n_2\} \quad b_n \leq c_n < \ell + \varepsilon$

$\Rightarrow \forall n \geq \max\{\bar{n}, n_1, n_2\} \quad \ell - \varepsilon < b_n < \ell + \varepsilon$ C.V.D.

2023/10/17 ANALISI I

SUCCESSIONI MONOTONE

Una successione a_n è detta monotona se verifica una delle seguenti condizioni:

1) $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
successione monotona crescente

2) $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
successione monotona decrescente

1) $a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
successione SMC

2) $a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
successione SMD

Ogni successione costante è detta sia crescente che decrescente, non strettamente.

TEOREMA REGOLARITÀ-MONOTONIA

Se a_n è una successione monotona, essa è regolare, quindi ammette limite.

Se a_n è MC, allora $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup(a_n) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Se a_n è MD, allora $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \inf(a_n) \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione:

Sia a_n una successione MC.

1) a_n successione superiormente limitata

$\Rightarrow \exists \sup(a_n) = \ell \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \ell = \min(\text{Maggioranti}) \Rightarrow \ell - \varepsilon$ non è un maggiorante

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ a_{n_0} > \ell - \varepsilon$

$\Rightarrow a_n$ è MC $\Rightarrow a_m \leq a_n \quad \forall m, n \in \mathbb{N} : m < n$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \quad a_n \geq a_{n_0} > \ell - \varepsilon$ C.V.D.

2) a_n successione superiormente illimitata

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Rightarrow$ \\ definizione di limite

$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ a_{n_0} > M \Rightarrow a_n \geq a_{n_0} > M$ C.V.D.

COROLLARIO

Se a_n è una successione monotona e limitata, allora essa è convergente.

SUCCESSIONE DI NEPERO

La successione $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è limitata e monotona, quindi convergente.

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ell \in \mathbb{R} = e \quad \text{(detto numero di Nepero)}$$

Dimostrazione:

1) a_n è MC in quanto $a_{n-1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq 2$

$a_{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

$\Rightarrow \frac{n-1}{n} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n \Rightarrow \frac{n-1}{n} \leq \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n$

$\Rightarrow 1-\frac{1}{n} \leq \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \Rightarrow$ diseq. di Bernoulli $\Rightarrow 1+nx \leq (1+x)^n$ C.V.D.

2) a_n MC $\Rightarrow$ inf. limitata $\Rightarrow a_n \geq a_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3) a_n superiormente limitata

$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow b_n \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ per definizione

b_n MD $\Rightarrow$ b_n superiormente limitata $\Rightarrow$ a_n è sup. lim. C.V.D.

4) Per il T. regolarità - monotonia, $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n$ ~~sup~~ $= e \in \mathbb{R}$.

In particolare, per la 3), $e \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Una stima di e è $e \leq b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \wedge e \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$\Rightarrow a_n < e < b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n=1, \quad 2<e<4 \qquad n=2, \quad \frac{9}{4}<e<\frac{27}{8}$

$\Rightarrow n=4, \quad \left(\frac{5}{4}\right)^4 < e < \left(\frac{5}{4}\right)^5 \quad \dots \quad n=100, \left(\frac{101}{100}\right)^{100} < e < \left(\frac{101}{100}\right)^{101} \dots$

$\Rightarrow e \simeq 2,718$

2023/10/18 ANALISI I

DISUGUAGLIANZA DI NEPERO

$$\frac{1}{n+1} \leq \log\left(1+\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

RELAZIONE DI ASINTOTICO

Date a_n, b_n si dice che a_n è asintotica a b_n per $n \to +\infty$, ovvero $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty$, se $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$. Per esempio, $(n^2+n) \sim (n^2-3n)$.

PROPRIETÀ DELLA RELAZIONE DI ASINTOTICO

1) Relazione di equivalenza, ovvero
   a) Simmetria; $a_n \sim b_n \iff b_n \sim a_n$.
   b) Riflessiva; $a_n \sim a_n$.
   c) Transitiva; $a_n \sim b_n \wedge b_n \sim c_n \Rightarrow a_n \sim c_n$.
2) Se $a_n \sim b_n$ per $n \to +\infty \wedge \lim_{n \to +\infty} b_n = \ell \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$.
3) Se $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow a_n \sim \ell$.
4) Principio di sostituzione (solo per prodotti, rapporti, e potenze);
   Se $a_n \sim b_n \Rightarrow \forall c_n \neq 0 \quad a_n \cdot c_n \sim b_n \cdot c_n \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n \cdot c_n = \lim_{n \to +\infty} b_n \cdot c_n$

$$\frac{a_n}{c_n} \sim \frac{b_n}{c_n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{b_n}{c_n}$$

2023/10/19 ANALISI I

TEOREMA DEL CRITERIO DEL RAPPORTO

Se a_n è una successione a termini positivi tale che $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \mathbb{R}^+$,

$\Rightarrow$ 1) $\ell < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \land \exists n_0 \in \mathbb{N}, b \in (0,1), A > 0 : a_n \leq A \cdot b^n \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow$ 2) $\ell > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \land \exists n_0 \in \mathbb{N}, b \in (1,+\infty), A > 0 : a_n \geq A \cdot b^n \quad \forall n \geq n_0$

Dimostrazione:

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0,1) \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ell - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow a_{n+1} < \overbrace{(\ell + \varepsilon)}^{=b} \cdot a_n \quad \forall n \geq n_0$

Dato che $0 \leq \ell \leq 1$, sia $\varepsilon > 0 : b = \ell + \varepsilon < 1 \land n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$a_{n+1} < b \cdot a_n \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow a_{n_0+1} < b \cdot a_{n_0} \Rightarrow a_{n_0+3} < b \cdot a_{n_0+2} < b^2 a_{n_0+1} < b^3 a_{n_0}$

$\Rightarrow a_{n_0+k} < b^k \cdot a_{n_0} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

Preso $n > n_0$, sia $k = n - n_0$, allora

$a_n = a_{n-n_0+n_0} = a_{n_0+k} \Rightarrow a_{n_0+k} < b^k \cdot a_{n_0} = b^n \cdot \frac{a_{n_0}}{b^{n_0}} = A \cdot b^n$ C.V.D.

GERARCHIA DEGLI INFINITI

$\log_b n \ll n^p \ll b^n \ll n! \ll n^n$

2023/10/20 ANALISI I

ORDINE DI INFINITO

Date due successioni a_n, b_n tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \pm\infty \wedge \lim_{n\to+\infty} b_n = \pm\infty$, si dice che a_n ha ordine di infinito minore di b_n, ovvero $ord(a_n) < ord(b_n)$ per $n \to +\infty$, se e solo se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

Si dice che a_n ha lo stesso ordine di infinito di b_n per $n \to +\infty$, ovvero $ord(a_n) = ord(b_n)$, se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Valgono le due proprietà seguenti:

1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \iff a_n \sim l \cdot b_n$ per $n \to +\infty$

2) $ord(a_n) < ord(b_n) \wedge ord(b_n) < ord(c_n) \Rightarrow ord(a_n) < ord(c_n)$

LIMITI DI FUNZIONI REALI

Una funzione reale è una funzione $f: D \subseteq \mathbb{R} \to C \subseteq \mathbb{R}$.
Dove $f(x)$ è detta immagine di $x \in D$ tramite la funzione f.
Se $B \subseteq D$, si dice immagine di B tramite l'insieme
$f(B) = \{f(x) : x \in B\}$.
Si dice immagine di $f: D \subseteq \mathbb{R} \to C \subseteq \mathbb{R}$ l'insieme
$f(D) = Im(f) = \{f(x) : x \in D\} \subseteq C$.
Se $f(D) \equiv C$, f è detta funzione suriettiva.

Sia $f(x)$ una funzione reale definita in un intervallo I eccetto eventualmente nel suo centro $x_0 \in I$: $f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $I \setminus \{x_0\} \subseteq D$.
Si dice che $f(x)$ ha limite $l \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$:
$x \in I \setminus \{x_0\} \wedge |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon \quad \forall x \in (I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \wedge dom f)$$

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE

Se $f(x)$ ammette limite per $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, allora esso è unico!

Dimostrazione per assurdo:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \vee l_2 \qquad l_1 \neq l_2 \wedge l_1 > l_2$

$\Rightarrow 0 < \varepsilon < \frac{l_1 - l_2}{2} \Rightarrow \begin{cases} l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon \\ l_2 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon \end{cases} \Rightarrow l_2 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon$

$\Rightarrow l_2 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon \Rightarrow 2\varepsilon > l_2 - l_1 \Rightarrow \varepsilon > \frac{l_2 - l_1}{2}$

Incontraddizione tra $\varepsilon > \frac{l_2 - l_1}{2}$ ed $\varepsilon < \frac{l_1 - l_2}{2}$ C.V.D.

2023/10/24 ANALISI I

LIMITE DESTRO E SINISTRO

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo I eccetto eventualmente in $x_0 \in I$.
Si dice che $f(x)$ ha limite $\ell \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$ da destra, ovvero
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$, se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \wedge x > x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.
Si dice che $f(x)$ ha limite $\ell \in \mathbb{R}$ per $x \to x_0$ da sinistra, ovvero
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$, se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \wedge x < x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$.

TEOREMA DI DIRICHLET

Il $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ se e solo se $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.
Un esempio di funzione che viola questa regola è la funzione di Dirichlet;
$D(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ $D(x)$ detta funzione di Dirichlet

Dimostrazione per assurdo:

Per assurdo, supponiamo $\exists \lim_{x \to x_0^+} D(x) = \ell \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$
$\wedge \ x > x_0 \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$
$\Rightarrow$ Per il T. di densità dei razionali $\exists q \in \mathbb{Q} : x_0 < q < x_0 + \delta \Rightarrow D(q) = 1$
$\Rightarrow$ Devo concludere che $\ell = 1 \Rightarrow |D(x) - 1| < \varepsilon$
$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow r = q + \frac{\sqrt{2}}{n} < x_0 + \delta$
$\Rightarrow D(r) = 0 \Rightarrow 0 \leq ||D(x)| - \ell| = |-\ell| = |\ell| < \varepsilon \Rightarrow \ell = 0$
$\Rightarrow$ Contraddizione del T. di unicità del limite C.V.D.

LIMITE INFINITO

Sia $f(x)$ una funzione definita in I eccetto eventualmente $x_0 \in I$.
Si dice che $f(x)$ ha limite $+\infty$ per $x \to x_0$, ovvero $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$,
se $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \wedge |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$.
Si dice che $f(x)$ ha limite $-\infty$ per $x \to x_0$, ovvero $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$,
se $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \wedge |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M$.

TEOREMA PONTE

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo I eccetto eventualmente $x_0 \in I$.
Sono allora equivalenti le seguenti affermazioni;

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$
2. $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \wedge \forall x_n : x_n \in I \ x_n \neq x_0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$

Dimostrazione:

$\ell \in \mathbb{R}$ ① $\Rightarrow$ ②

Per ipotesi, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

Proviamo che $\forall x_n : x_n \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \wedge \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$.

Dato che $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \; |x_n - x_0| < \delta$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \; x_n \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \wedge |x_n - x_0| < \delta$

$\Rightarrow |f(x_n) - \ell| < \varepsilon$ C.V.D.

$\ell \in \mathbb{R}$ ② $\Rightarrow$ ①

Per assurdo, supponiamo $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x) \vee \lim_{x \to x_0} f(x) \neq \ell$

$\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \; \exists x_\delta \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} : |f(x_\delta) - \ell| \geq \varepsilon_0$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \; \delta = \frac{1}{n} \Rightarrow \exists x_\delta \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} : |f(x_\delta) - \ell| \geq \varepsilon_0$

$\Rightarrow$ Poiché $\forall n \in \mathbb{N} \; 0 \leq |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, per il T. dei due carabinieri,

$n \to +\infty \quad \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell \quad \Rightarrow \quad 0 \leq |x_n - x_0| < 0$

$\Rightarrow$ In contraddizione con $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0 \; \forall n \in \mathbb{N}$ C.V.D.

ASINTOTI

La retta $x = x_0$ di una funzione $f(x) : \lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \pm\infty$, cui non interseca mai la funzione $f(x)$, è detto asintoto verticale di $f(x)$.

La retta $y = \ell$ di una funzione $f(x) : \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$, cui non interseca mai la funzione $f(x)$, è detto asintoto orizzontale di $f(x)$.

2023/10/25 ANALISI I

TEOREMA

Sia $f(x)$ una funzione definita in $I \subseteq \mathbb{R}$ eccetto eventualmente $x_0 \in I$.

Si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l^+$ se $f(x)$ assume valori più grandi di l almeno in un intorno di x_0 $I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Si dice che $\lim_{x \to x_0} f(x) = l^-$ se $f(x)$ assume valori più piccoli di l almeno in un intorno di x_0 $I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$.

TEOREMA ALGEBRA DEI LIMITI

Siano $f(x), g(x)$ funzioni definite in $I \subseteq \mathbb{R}$ eccetto eventualmente in $x_0 \in I$.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \wedge \lim_{x \to x_0} g(x) = m \in \overline{\mathbb{R}}$, allora;

1. $\lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = l + m \quad \forall\, l, m \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{l = -\infty, m = +\infty\}$
2. $\lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m \quad \forall\, l, m \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{l = 0, m = \pm\infty\}$
3. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m} \quad \forall\, l, m \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{l = m = 0 \vee l = \pm\infty, m = \pm\infty\}$

FUNZIONI COMPOSTE

Siano $f(x), g(x)$ tali che $f: Dom\, f \to \mathbb{R}$, $g: Dom\, g \to \mathbb{R}$.

Si dice funzione composta $f \circ g = f(g(x)) \vee g \circ f = g(f(x))$;

$f \circ g: \{x \in Dom\, g : g(x) \in Dom\, f\} \to \mathbb{R}$.

TEOREMA DI LIMITE DI FUNZIONE COMPOSTA

Sia $g(x): I \to \mathbb{R}$ eccetto eventualmente in $x_0 \in I$: $\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0 \in \mathbb{R}$.

Sia $f(x)$ funzione definita in $I_\delta(y_0)$ eccetto eventualmente in $y_0 \in \mathbb{R}$. Se;

1. $\exists \lim_{y \to y_0} f(y) = l \in \overline{\mathbb{R}}$
2. $\exists\, \delta > 0 : g(x) \neq y_0 \quad \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{y \to y_0} f(y) = l$

NUOVA DEFINIZIONE ASINTOTICA

Date due funzioni definite su $I \subseteq \mathbb{R}$ eccetto eventualmente in $x_0 \in I$.

Si dice che $f(x)$ è asintotica a $g(x)$ per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Valgono le seguenti proprietà;

1. Relazione di equivalenza
2. $f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0 \wedge \lim_{x \to x_0} g(x) = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = l$
3. $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Rightarrow f(x) \sim l$
4. Principio di sostituzione (solo per prodotti)

   $f(x) \sim g(x) \wedge h(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) \cdot h(x) \sim g(x) \cdot h(x)$

2023/10/24 ANALISI I

TRASCURABILITÀ

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$, si dice che $f(x)$ è trascurabile rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

In seguito, scriveremo $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$.

Proprietà:

1) $f(x) \sim g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$ per $x \to x_0$
2) $f(x) = o(h(x)) \wedge g(x) = o(h(x)) \Rightarrow f(x) \pm g(x) = o(h(x))$ per $x \to x_0$
3) $o(h(x)) \pm o(h(x)) = o(h(x))$ per $x \to x_0$
4) $k \cdot o(h(x)) = o(k \cdot h(x)) = o(h(x))$ per $x \to x_0$
5) $g(x) \cdot o(h(x)) = o(g(x) \cdot h(x))$ per $x \to x_0$
6) $o(h(x)) \cdot o(k(x)) = o(h(x) \cdot k(x))$ per $x \to x_0$
7) $o(o(k(x))) = o(k(x))$ per $x \to x_0$
8) $o(h(x) + o(h(x))) = o(h(x))$ per $x \to x_0$

PRINCIPIO DI ELIMINAZIONE DEI TRASCURABILI

Siano $f(x), g(x)$ due funzioni definite in $I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$.

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + o(f(x))}{g(x) + o(g(x))} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Dimostrazione:

$f(x) + o(f(x)) \sim f(x) \wedge g(x) + o(g(x)) \sim g(x)$

$\Rightarrow$ Per il Principio di sostituzione di $\sim$,

$\Rightarrow \frac{f(x) + o(f(x))}{g(x) + o(g(x))} \sim \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + o(f(x))}{g(x) + o(g(x))} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ C.V.D.

ORDINE DI INFINITESIMO

Date due funzione $f(x), g(x)$: $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \wedge \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$,

Si dice che $f(x)$ ha ordine di infinitesimo maggiore di $g(x)$ per $x \to x_0$, ovvero $ord(f(x)) > ord(g(x))$, se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = o(g(x))$ $x \to x_0$.

Si dice che $f(x)$ ha ordine di infinitesimo pari a $g(x)$ per $x \to x_0$, ovvero $ord(f(x)) = ord(g(x))$, se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \Leftrightarrow f(x) \sim l \cdot g(x)$ $x \to x_0$.

Si dice che $f(x)$ ha ordine di infinitesimo $b > 0$ se $ord(f(x)) = ord(g_b(x))$ per $x \to x_0$, ove $g_b(x) = \begin{cases} |x - x_0|^b & \text{se } x_0 \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{|x|^b} & \text{se } x_0 = \pm\infty \end{cases}$ è detto infinitesimo campione.

Se $x_0 \in \mathbb{R}$, $ord(f(x)) = b$ per $x \to x_0^+$ se e solo se $ord(f(x)) = ord((x - x_0)^b)$

$\Leftrightarrow \exists l \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : f(x) \sim l(x - x_0)^b \Leftrightarrow f(x) = l(x - x_0)^b + o((x - x_0)^b)$.

2023/10/30 ANALISI I

TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO

Sia $f(x): I \to \mathbb{R}$ eccetto eventualmente in $x_0 \in I$.

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^+$, allora $f(x) > 0 \quad \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Dimostrazione:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = \frac{\ell}{2}$ per esempio

$0 < \frac{\ell}{2} < f(x) < \frac{3}{2}\ell \Rightarrow f(x) > 0$ C.V.D.

TEOREMI DEL CONFRONTO

① Se $\exists I(x_0) : \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \; f(x) \leq g(x)$, allora $\ell \leq m$.

② Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \land \exists I(x_0) : \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \; f(x) \leq g(x)$,
allora $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$.

③ Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell \land \exists I_\delta(x_0) : \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \; f(x) \leq g(x) \leq h(x)$,
allora $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell$.

TEOREMA DEI LIMITI DI FUNZIONI MONOTONE

Sia $f(x)$ definita in (a,b) e sia essa MC su (a,b).

Allora, $\forall x_0 \in (a,b)$ $\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R} = \inf(f(x))$ con $x_0 < x < b$

$\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell \in \mathbb{R} = \sup(f(x))$ con $a < x < x_0$.

Inoltre, $\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \inf(f(x))$ con $a < x < b$

$\exists \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup(f(x))$ con $a < x < b$.

Dimostrazione:

Dimostriamo $\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf(f(x))$ con $x_0 < x < b$ ed $\in \mathbb{R}$.

$f(x_0)$ minorante di $f(x)$ su (x_0, b)

$\Rightarrow$ Per il T. di esistenza degli estremi, $\inf(f(x))$ esiste ed è finito.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \; |f(x) - \ell^+| < \varepsilon$

$\Rightarrow \ell^+ - \varepsilon < f(x) < \ell^+ + \varepsilon \quad \forall x \in (x_0, b) \Rightarrow \ell^+$ estremo inferiore

$\Rightarrow f(x) < \ell^+ + \varepsilon \Rightarrow \ell^+ + \varepsilon$ non è minorante di $f(x)$ su (x_0, b).

$\Rightarrow \exists \bar{x} \in (x_0, b) : f(\bar{x}) < \ell^+ + \varepsilon$

$\Rightarrow$ Data $f(x)$ MC, $\forall x < \bar{x} \; f(x) < f(\bar{x}) < \ell^+ + \varepsilon$ C.V.D.

CONTINUITÀ

Sia $f(x)$ definita in un intervallo I e sia x_0 un punto $\in I$.

Si dice che $f(x)$ è continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} = f(x_0) \in \mathbb{R}$.

Ovvero, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Si dice che $f(x)$ è continua in un sottoinsieme del suo dominio se essa è continua in ogni punto del sottoinsieme in questione.

L'insieme delle funzioni continue si indica con $C(I)$ sull'intervallo I.

Somma, prodotto, quoziente di funzioni continue sono anch'essi continui.

2023/10/31 ANALISI I

TEOREMA SULLA CONTINUITÀ DI UNA COMPOSTA

Se $g(x)$ è continua in x_0, $f(y)$ è continua in $y_0 = g(x_0)$,
allora $f \circ g(x) = f(g(x))$ è continua.

Inoltre, $\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \lim_{y \to y_0} f(y) = f(y_0) = f(g(x_0))$.

Dalla definizione di limite destro e sinistro, $f(x)$ è continua in x_0 se $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = f(x_0)$.
Per una funzione definita a tratti del tipo $f(x) = \begin{cases} h(x) & x > x_0 \\ g(x) & x \le x_0 \end{cases}$, questo vale se e solo se $h(x_0) = g(x_0)$ (considerando eventuali indeterminazioni).

CLASSIFICAZIONE DELLE DISCONTINUITÀ

Se $f(x)$ non è continua in x_0, x_0 si dice punto di discontinuità di $f(x)$.
Abbiamo la seguente classificazione delle discontinuità:

1) Se almeno uno dei limiti laterali non esiste o non esiste finito, si dice che x_0 è punto di discontinuità essenziale.
2) Se i due limiti laterali esistono finiti ma non sono uguali, si dice che x_0 è punto di discontinuità di salto.
3) Se $l \neq f(x_0) \in \mathbb{R}$, ovvero la funzione ed il valore comune non coincidono, si dice che x_0 è punto di discontinuità eliminabile.

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

Sia $f(x)$ una funzione continua su $[a, b] \wedge f(a) < 0 < f(b)$.
Allora $\exists \bar{x} \in (a, b) : f(\bar{x}) = 0$.

Dimostrazione col metodo di bisezione:

$a_n < c_n < b_n \quad c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ Possono verificarsi 3 situazioni:

1) $f(c) = 0 \Rightarrow x_0 = c$ C.V.D.
2) $f(c) > 0 \Rightarrow a_n = a \quad b_n = c \Rightarrow f(a_n) < 0 \quad f(b_n) > 0$ e ripeti
3) $f(c) < 0 \Rightarrow a_n = c \quad b_n = b \Rightarrow f(a_n) < 0 \quad f(b_n) > 0$ e ripeti

Se non si verifica 1) dopo varie ripetizioni di 2) $\vee$ 3), $f(x)$ non è continua.

2023/11/03

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

Se $f(x)$ è continua in $[a,b]$, allora $f(x)$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$. Ovvero $\forall y_0 \in [f(a), f(b)] \ \exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = y_0$.

Dimostrazione:

Sia $f(a) \leq f(x_0) = y_0 \leq f(b)$.

Se $f(a) < y_0 < f(b)$, sia $g(x) = f(x) - y_0$. Abbiamo che $g(x)$ è continua in $[a,b]$ dato che $f(x)$ è continua. Inoltre, $g(a) = f(a) - y_0 < 0$ e $g(b) = f(b) - y_0 > 0$. Per il T. di esistenza degli zeri, $\exists x_0 \in [a,b]$: $g(x_0) = f(x_0) - y_0 = 0$, ovvero $f(x_0) = y_0$. C.V.D.

Se $f(a) = y_0 = f(b)$, la funzione è continua almeno su $[a,b]$. C.V.D.

Se $f(x)$ è continua in un intervallo I, allora $f(x)$ assume tutti i valori strettamente compresi tra $\inf(f(x))$ e $\sup(f(x))$ per $x \in I$.
Se $\inf(f(x)) < y_0 < \sup(f(x))$, allora $\exists x_0 \in I : f(x_0) = y_0$

Dimostrazione:

Sia $\inf(f(x)) < y_0 < \sup(f(x))$.

Allora y_0 non è minorante di $f(x)$ su I, quindi $\exists a \in I : f(a) < y_0$.
y_0 non è maggiorante di $f(x)$ su I, quindi $\exists b \in I : f(b) > y_0$.

A questo punto puoi riferirti alla dimostrazione sopra. C.V.D.

Se $f(x)$ è continua in $[a,b]$, allora $f(x)$ assume tutti (e soltanto) i valori compresi tra il minimo ed il massimo di $f(x)$ su $[a,b]$.
Ovvero, $f([a,b]) = [m, M]$ se e solo se $f(x)$ è continua su $[a,b]$.

TEOREMA CONTINUITA'-MONOTONIA

Se $f(x)$ è funzione monotona crescente su $[a,b]$, allora $f(x)$ è continua su $[a,b]$ se e solo se $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.

Dimostrazione per assurdo:

Supponiamo che $\exists x_0 \in [a,b]$ dove $f(x)$ non è continua.

Se $x_0 \in (a,b)$, allora $\exists \lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \ell^\pm$ e $\sup(f(x)) = \ell^- \leq f(x_0) \leq \ell^+ = \inf(f(x))$ per $x \in [a,b]$.

Data $f(x)$ non continua, almeno uno dei due $\ell^\pm$ è diverso da $f(x_0)$.

Supponiamo $\ell^+ \neq f(x_0) \Rightarrow f(x_0) < y_0 < \ell^+ \Rightarrow \nexists \bar{x} \in [a,b] : f(\bar{x}) = y_0$

Ma $y_0 \in [f(a), f(b)]$ e per ipotesi $[f(a), f(b)] = f([a,b])$, ovvero $\forall y \in [f(a), f(b)] \ \exists x \in [a,b] : f(x) = y$. C.V.D.

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Se $f(x)$ è continua in $[a,b]$, allora $f(x)$ ammette massimo e minimo in $[a,b]$: $\exists x_m, x_M \in [a,b] : f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \ \forall x \in [a,b]$

Ovvero, se $f(x)$ è una funzione continua su $[a,b]$, allora:

1. $f(x)$ è limitata su $[a,b]$
2. $\exists \min(f(x)), \max(f(x))$ su $[a,b]$
3. $f([a,b]) = [\min(f(x)), \max(f(x))]$

2023/11/07 ANALISI I

TEOREMA CON-INI-MON

Se $f(x)$ è continua su $[a,b]$, allora $f(x)$ è iniettiva su $[a,b]$ se e solo se $f(x)$ è strettamente monotona su $[a,b]$.

Se $f(x)$ non è strettamente monotona su $[a,b] \Rightarrow \exists x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$: $x_1 < x_2 < x_3 \wedge f(x_1) < f(x_2) \wedge f(x_2) > f(x_3)$. Dal T. dei valori intermedi, se $y_0 \in [f(x_3), f(x_1)]$, allora $\exists \bar{x}_0 \in (x_2, x_3) : f(\bar{x}_0) = y_0$, cui è in contraddizione con la condizione di iniettività.

E tutto questo può essere dedotto dal T. dei valori intermedi: $f([a,b]) = [m, M]$.

TEOREMA SULLA CONTINUITA' DELL'INVERSA

Sia $f(x)$ una funzione continua ed iniettiva su $[a,b]$.

Allora la sua funzione inversa $f^{-1}(y)$ è continua su $f([a,b])$.

Ogni inversa di funzione continua è anch'essa continua, in quanto non può che essere composta di funzioni continue.

Dimostrazione:

$f(x)$ è strettamente monotona, per esempio SMC.

Se $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \text{Dom} f$.

$\Rightarrow y_1 < y_2 \Leftrightarrow x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) = x_2$

$\Rightarrow f^{-1}(y)$ è SMC su $f([a,b]) \Rightarrow f([a,b]) = [f(a), f(b)]$

$\Rightarrow f^{-1}(y)$ è continua su $f([a,b])$ se e solo se $f^{-1}([\alpha,\beta]) = [f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta)]$

$\Rightarrow f^{-1}([\alpha,\beta]) = f^{-1}([f(a), f(b)]) = [a,b] = [f^{-1}(\alpha), f^{-1}(\beta)]$ C.V.D.

DERIVATA E DERIVABILITA'

Sia $f(x)$ definita in $I_\delta(x_0)$. Si dice che $f(x)$ è derivabile in x_0 se $\exists! \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{df}{dx} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$. Il rapporto $\frac{df}{dx}$ è detto rapporto incrementale di $f(x)$ tra x ed x_0.

Se $f(x)$ è definita in un intervallo aperto I, si dice che $f(x)$ è derivabile su I se è derivabile $\forall x_0 \in I$.

Se $f(x)$ è derivabile in x_0, la sua derivata in x_0 è denotata con $f'(x_0)$ oppure $\dot{f}(x_0)$ oppure $\frac{df}{dx}(x_0)$ oppure $D f(x_0)$.

Se $f(x)$ è derivabile in x_0, allora $\exists! \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$.

Data l'interpretazione geometrica di Leibniz, la derivata di $f(x)$ in x_0 rappresenta il coefficiente angolare della retta secante $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_h = (x_0+h, f(x_0+h))$, dove $r_h = f(x_0) + \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0)$.

Se $h \to 0$, il segmento di x diventa un solo punto, e dunque r_0 diventa una retta secante al grafico di $f(x)$ nel punto $P_0 = (x_0, f(x_0))$.

TEOREMA DER-CON

Se $f(x)$ è derivabile in x_0, $f(x)$ è continua in x_0.

Dimostrazione:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) + f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{df}{dx}(x - x_0) + f(x_0)$$

$$= \lim_{x \to x_0} f'(x_0) \cdot (0) + f(x_0) = f(x_0)$$

C.V.D.

2023/11/08 ANALISI I

DERIVATA LATERALE

Sia $f(x)$ una funzione definita in $[x_0, x_0+\delta]$ con $\delta > 0$.
Allora $f(x)$ è derivabile a destra di x_0 se $\exists! \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{df}{dx}$
$= f'_+(x_0)$ è detta derivata destra di $f(x)$ in x_0.

Sia $f(x)$ una funzione definita in $[x_0-\delta, x_0]$ con $\delta > 0$.
Allora $f(x)$ è derivabile a sinistra di x_0 se $\exists! \lim_{x\to x_0^-} \frac{df}{dx} = f'_-(x_0)$ è detta derivata sinistra di $f(x)$ in x_0.

Per il T. di unicità del limite, $f(x)$ definita in $I_\delta(x_0)$ è derivabile in x_0 se e solo se $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$.

PUNTI NON DERIVABILI

Se $f(x)$ è continua in $x_0 \land \exists f'_\pm(x_0) \in \mathbb{R}$ ma $f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$, x_0 si dice punto di non derivabilità, e punto angoloso per $f(x)$. Ovvero, la funzione non ammette una sola tangente in x_0, ma soltanto una combinazione di due rette formanti un angolo non nullo.
Se $f(x)$ è continua in x_0 ma $\nexists f'_\pm(x_0) \in \mathbb{R} \land f'_+(x_0) = -f'_-(x_0)$, x_0 si dice punto di non derivabilità, e cuspide per $f(x)$. Ovvero, le due rette tangenti in x_0 ad $f(x)$ formano un angolo nullo.
Se $f(x)$ è continua in x_0 ma $\nexists f'_\pm(x_0) \in \mathbb{R} \land f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, x_0 si dice punto di non derivabilità, e punto a tangente verticale per $f(x)$.
Se $f(x)$ non è continua in x_0, $f(x)$ non è derivabile in x_0.

TEOREMA REGOLE DI DERIVAZIONE

Ricordati che la derivazione è un'applicazione lineare, ovvero
$D(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$, ma solo nelle funzioni derivabili.
Se $f(x), g(x)$ sono derivabili in x_0, allora sono derivabili in x_0 anche ...

1. $f(x) + g(x) \Rightarrow f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $f(x) \cdot g(x) \Rightarrow f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
3. $f(x) / g(x) \Rightarrow \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$ se $g(x_0) \neq 0$

Dimostrazione:

② $f(x) \cdot g(x) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)\cdot g(x) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$

$= \backslash\backslash\ g(x)\frac{df}{dx} + f(x_0)\frac{dg}{dx} = g(x_0)\cdot f'(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$ C.V.D.

2023/11/10 ANALISI I

DIFFERENZIABILITÀ

Si dice che $f(x)$ è differenziabile in x_0 se $\exists A \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + o(x-x_0) = p(x) + o(x-x_0) \text{ per } x \to x_0.$$

Se $f(x)$ è derivabile in x_0, allora è differenziabile in x_0 con $A = f'(x_0)$.

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE

Se $f(x)$ è differenziabile in x_0 con $f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + o(x-x_0)$ per $x \to x_0$ allora $f(x)$ è derivabile in x_0 con $f'(x_0) = A$.

Ovvero, l'unico polinomio di grado minore o uguale ad $f(x)$ è $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, detto polinomio di Taylor centrato in x_0.

Dimostrazione:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0) + A(x-x_0) + o(x-x_0) - f(x_0)}{x-x_0}$$

$$= \lim_{x\to x_0} A + \frac{o(x-x_0)}{x-x_0} = A \Rightarrow \exists A = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$ C.V.D.

TEOREMA SULLA DERIVATA COMPOSTA

Se $f(x)$ è derivabile in x_0 e $g(y)$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$, allora $(g\circ f)(x) = g(f(x))$ è derivabile in x_0 $\wedge$ $g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = (g\circ f)'(x_0)$.

Dimostrazione:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) \qquad g(y) = g(y_0) + g'(y_0)(y-y_0) + o(y-y_0)$$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + g'(f(x_0))(f(x)-f(x_0)) + o(f(x)-f(x_0)) \Rightarrow$$

$$g(f(x)) = g(f(x_0)) + A(x-x_0) + o(x-x_0), \text{ ove } A = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

$\Rightarrow g(f(x))$ è differenziabile in x_0 con $A = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

$\Rightarrow$ Dal T. del differenziale, $g(f(x))$ è derivabile in x_0 $\wedge$ $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$ C.V.D.

TEOREMA SULLA DERIVATA INVERSA

Se $f(x)$ è continua ed iniettiva su (a,b) ed è derivabile in $x_0 \in (a,b)$ con $f'(x_0) \neq 0$, allora $f^{-1}(y)$ è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ con $(f^{-1})'(y_0) = (f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0) = 1/f'(f^{-1}(y_0))$.

Dimostrazione:

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{df^{-1}}{dy}(y_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)} = 1/f'(x_0)$$

$\Rightarrow (f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$ C.V.D.

2023/11/15 ANALISI I

TEOREMA DI FERMAT

Sia $f(x)$ definita su I e sia $x_0 \in I$ un punto di minimo o massimo relativo per $f(x)$ su I.

Se x_0 è interno ad I, $\exists \delta_0 > 0 : I_{\delta_0}(x_0) \subset I$, ed $f(x)$ è derivabile su I, allora $f'(x_0) = 0$, e diremo che x_0 è un punto stazionario o punto critico per $f(x)$.

Dimostrazione:

x_0 punto di massimo $\Rightarrow \exists \delta > 0 : f(x_0) \geq f(x) \ \forall x \in I \cap I_{\delta_0}(x_0)$

$\Rightarrow f(x_0) \geq f(x) \ \forall x \in I_\delta(x_0)$

$\Rightarrow \exists f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ma per $f(x) \leq f(x_0) \wedge x > x_0$ ...

$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0$ se $x > x_0$

$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ se $x < x_0$

$\Rightarrow$ Per il T. di permanenza del segno, $f'(x_0) = 0$. C.V.D.

CONSEGUENZE DI FERMAT

Dal Teorema di Fermat, i candidati punti di massimo e di minimo relativo per $f(x)$ in I sono da cercarsi tra ...

1. Punti non interni ad I
2. Punti di non derivabilità per $f(x)$ in I
3. Punti critici di $f(x)$ su I.

TEOREMA DI ROLLE

Sia $f(x)$ continua su $[a,b] \wedge$ derivabile in $(a,b) : f(a) = f(b)$.
Allora $\exists x_0 \in (a,b) : f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione:

Per il T. di Weierstrass, $\exists x_m, x_M \in [a,b] : f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$

$\Rightarrow$ ① $x_m \in (a,b) \vee x_M \in (a,b)$

$\Rightarrow$ ② $x_m \notin (a,b) \wedge x_M \notin (a,b) \Rightarrow x_m, x_M \in \{a, b\}$

$\Rightarrow$ Se ②, Per il T. di Fermat, $\ell = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = \ell \Rightarrow f'(x_0) = 0$

$\Rightarrow$ Se ①, Per il T. di Fermat, $f'(x_m) = 0 \vee f'(x_M) = 0$ C.V.D.

TEOREMA DI LAGRANGE

Se $f(x)$ è continua su $[a,b]$ $\wedge$ derivabile su (a,b), allora $\exists\, x_0 \in (a,b)$: $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dimostrazione:

Consideriamo $g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)$ → retta passante per P_a, P_b

$\Rightarrow$ Per il T. di Rolle $\exists\, x_0 \in (a,b) : g'(x_0) = 0$

$\Rightarrow g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow g'(x_0) = 0 \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ C.V.D.

CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI COSTANTI

Una $f(x)$ è costante su $[a,b]$ se e solo se $f(x)$ è continua su $[a,b]$ $\wedge$ derivabile in (a,b) con $f'(x) = 0 \;\forall x \in (a,b)$.

Dimostrazione:

$f(x) = f(a) \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow$ Per il T. di Lagrange, $f'(x_0) = \frac{f(\bar{x})-f(a)}{\bar{x}-a} \quad \forall \bar{x} \in (a,b]$

$\Rightarrow$ Per $f'(x_0) = 0 \;\forall x_0 \in (a,b)$, $f(\bar{x}) - f(a) = 0 \Rightarrow f(\bar{x}) = f(a)$. C.V.D.

2023/11/17 ANALISI I

CARATTERIZZAZIONE DELLE PRIMITIVE

Se $f(x)$, $g(x)$ sono continue su $[a,b]$ $\wedge$ derivabili in (a,b) con $f'(x)=g'(x)$ $\forall x \in (a,b)$, allora $\exists c \in \mathbb{R} : g(x) = f(x)+c \ \forall x \in [a,b]$.

Dimostrazione:

Per il T. di caratterizzazione delle costanti, $u(x) = g(x) - f(x)$, $x \in [a,b]$. C.V.D.

CRITERIO DI MONOTONIA

Sia $f(x)$ continua su $[a,b]$ $\wedge$ derivabile in (a,b).

Allora, ① $f(x)$ è MC su $[a,b]$ se e solo se $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

② $f(x)$ è MD su $[a,b]$ se e solo se $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Dimostrazione:

$x_0 \in (a,b) \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^\pm} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ... se $x > x_0 \wedge x \in (a,b)$ ...

$\Rightarrow f(x) \geq f(x_0)$ se $f(x)$ è MC $\Rightarrow \frac{df}{dx}(x_0) \geq 0 \quad \forall x > x_0$

$\Rightarrow$ Per il T. di permanenza del segno, $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{df}{dx}(x_0) \geq 0$

Presi $x_1, x_2 \in [a,b] \wedge x_1 < x_2$, per il T. di Lagrange ...

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (x_1, x_2) : 0 \leq f'(x_0) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ C.V.D.

CRITERIO DI MONOTONIA STRETTA

Sia $f(x)$ continua su $[a,b]$ $\wedge$ derivabile in (a,b).

Allora, ① $f(x)$ è SMC su $[a,b]$ se e solo se $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$ $\wedge$ $f'(x)$ non è identicamente nulla in alcun $I \subset (a,b)$.

② $f(x)$ è SMD su $[a,b]$ se e solo se $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b)$ $\wedge$ $f'(x)$ non è identicamente nulla in alcun $I \subset (a,b)$.

2023/11/21 ANALISI I

CONVESSITÀ DI FUNZIONE

① Sia $f(x)$ derivabile su un intervallo aperto I. Si dice che $f(x)$ è convessa su I se $\forall x_0 \in I$, $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ $\forall x \in I$.
Strettamente se vale $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ $\forall x \in I$.

② Sia $f(x)$ derivabile su un intervallo aperto I. Si dice che $f(x)$ è concava su I se $\forall x_0 \in I$, $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ $\forall x \in I$.
Strettamente se vale $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ $\forall x \in I$.

Più in generale, $f(x)$ è convessa su I se il suo epigrafo
$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n : \forall x \in I \ \ y \geq f(x)\}$ è un insieme convesso, ovvero $\forall p, q \in E$ il segmento congiungente è interamente contenuto in E.
Se $f(x)$ è derivabile su I, le due richieste coincidono.

TEOREMA CRITERI DI CONVESSITÀ

① Sia $f(x)$ derivabile su un intervallo aperto I. Allora $f(x)$ è convessa su I se e solo se $f'(x)$ è MC su I. Oppure $f(x)$ è concava su I se e solo se $f'(x)$ è MD su I. Strettamente se essa è SMC o SMD su I.

② Sia $f(x)$ derivabile su $I(x_0)$. Si dice che $f(x)$ è derivabile due volte in x_0 se $f'(x)$ è derivabile in x_0.

Data $f(x)$ derivabile due volte, $f(x)$ si dice convessa su I se $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in I$, oppure $f(x)$ si dice concava su I se $f''(x) \leq 0$. Strettamente se $f''(x) > 0$ oppure $f''(x) < 0$.

Un punto $x_0 \in \text{Dom} f$ è un punto di flesso per $f(x)$ se $\exists \delta > 0$:
$f(x)$ è concava $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ ed $f(x)$ è convessa $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

2023/11/22 ANALISI I

TEOREMA DI CAUCHY

Siano $f(x), g(x)$ continue su $[a,b]$ $\wedge$ derivabili su (a,b).
Se $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$, allora $\exists x_0 \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Dimostrazione:

Applica il T. di Rolle su $u(x) = (f(b)-f(a))\, g(x) - (g(b)-g(a))\, f(x)$.

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Siano $f(x), g(x)$ continue su $[a,b]$ eccetto eventualmente $x_0 \in (a,b)$.
Se $f(x), g(x)$ sono derivabili su $(a,b) \setminus \{x_0\}$ $\wedge$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ $\wedge$
$g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ $\wedge$ $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, allora
$\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Dimostrazione:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \Rightarrow f(x_0) = g(x_0) = 0$

Preso $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in [a,b] \wedge x_n \neq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\wedge$ $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$

$\Rightarrow f(x), g(x)$ continue su $[x_0, x_n]$ $\wedge$ derivabili in (x_0, x_n)

$\Rightarrow$ Per il T. di Cauchy, $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\bar{x}_n)}{g'(\bar{x}_n)}$ con $\bar{x}_n \in (x_0, x_n)$.

$\Rightarrow$ Per il T. di caratterizzazione sequenziale del limite, $\lim_{n \to +\infty} \frac{f'(x_n)}{g'(x_n)} = \ell$.

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{f'(\bar{x}_n)}{g'(\bar{x}_n)} = \ell$. C.V.D.

TAYLOR CON RESTO DI PEANO

Sia $f(x)$ derivabile $(n-1)$ volte in un intorno di x_0 $\wedge$ derivabile n volte in x_0 con $n \in \mathbb{N} \geq 2$.

Allora, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + \ldots$
$+ \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$.

TEOREMA

Se $f(x)$ è continua in x_0 $\wedge$ $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$
$+ o((x-x_0)^n)$ per $x \to x_0$, allora $f(x)$ derivabile n volte in x_0
e $p(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$ è il suo polinomio di Taylor di ordine n in x_0 $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ $\forall k = 0, 1, \ldots, n$.

2023/11/24 ANALISI I

TEOREMA

Sia $f(x)$ derivabile n volte in x_0, $n \in \mathbb{N}$, e sia $P_{n,f}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$ il suo polinomio Taylor.

Allora $P_{n,f}(x_0) = f(x_0) \wedge P'_{n,f}(x) = f'(x_0) + f''(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$, ovvero $P'_{n,f}(x_0) = f'(x_0)$.

In generale, $P^{(k)}_{n,f}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \forall k \in [0,n] \cap \mathbb{Z}$.

Sia $f(x)$ derivabile n volte in x_0 e sia $p(x)$ polinomio di grado $\leq n$ tale che $p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \forall k \in [0,n] \cap \mathbb{Z}$.

Allora $p(x) \equiv P_{n,f}(x_0)$. Ovvero se $p(x) = a_0 + a_n(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n$, allora $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \in [0,n] \cap \mathbb{Z}$.

Si dice che $P_{n,f}(x)$ ed $f(x)$ hanno un contatto di ordine n in x_0.

2023/11/28 ANALISI I

CONDIZIONE SUFFICIENTE PER LA DERIVABILITÀ

Sia $f(x)$ derivabile su $(a,b) \setminus \{x_0\}$ e continua in $x_0 \in (a,b)$.

Se $\exists \lim_{x \to x_0} f'(x) = l \in \mathbb{R}$, allora $f(x)$ è derivabile in x_0 e $f'(x_0) = l$.

Se invece $\lim_{x \to x_0} f'(x) = \pm\infty$, allora $f(x)$ non è derivabile in x_0.

Dimostrazione:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{H}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to x_0} f'(x) \quad \text{C.V.D.}$$

TAYLOR CON RESTO DI LAGRANGE

Sia $f(x)$ derivabile $(n+1)$ volte in $I(x_0)$.

Allora $\forall x \in I \ \exists \bar{x} \in (x_0, x) : f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$, ove l'ultimo membro è detto resto di Lagrange.

FUNZIONI INTEGRABILI SECONDO RIEMANN

Sia $f(x)$ limitata su $[a,b]$ con $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$, dove $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b] \wedge 0 \leq y \leq f(x)\}$ con $\int_a^b f(x)dx = \text{AREA}(R)$.

Si dice partizione di $[a,b]$ un insieme finito di punti $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$: $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

Sia $f(x)$ limitata su $[a,b]$ e sia $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ una partizione di $[a,b]$. Siano $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \in \mathbb{R}$ ed $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\} \in \mathbb{R}$.

Chiameremo somma integrale inferiore l'approssimazione per difetto di R $s(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$ e somma integrale superiore l'approssimazione per eccesso di R $S(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$.

Se Q è un'altra partizione $P \subset Q$, allora Q è detto un raffinamento di P e si avrà $s(P,f) \leq s(Q,f) \wedge S(P,f) \geq S(Q,f)$.

Si dice che $f(x)$ è integrabile secondo Riemann su $[a,b]$ se e solo se $s(f) = S(f)$, cui valore comune è detto integrale di Riemann di $f(x)$ su $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$.

Se $\exists \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$, allora essa si dice area con segno della funzione integranda tra gli estremi di integrazione.

2023/11/29 ANALISI I

TEOREMA CRITERIO DI INTEGRABILITÀ

Se $f(x)$ è limitata su $[a,b]$ e $\forall \varepsilon>0 \ \exists P_\varepsilon$ di $[a,b]$: $S(P_\varepsilon,f)-s(P_\varepsilon,f)<\varepsilon$, allora $f(x)$ è integrabile su $[a,b]$.

Dimostrazione:

$s(f)=S(f) \quad s(f)=\sup(s(f,P)) \quad S(f)=\inf(S(f,P))$

$\forall P, \forall \varepsilon>0 \ \exists P_\varepsilon : S(P_\varepsilon,f)-s(P_\varepsilon,f)<\varepsilon$

$\Rightarrow S(f)-s(f)\le S(P_\varepsilon,f)-s(P_\varepsilon,f)<\varepsilon$

$\Rightarrow 0\le S(f)-s(f)<\varepsilon \quad \Rightarrow \quad S(f)-s(f)=0 \qquad$ C.V.D.

TEOREMA INTEGRABILITÀ DELLE MONOTONE

Se $f(x)$ è MC o MD su $[a,b]$, allora $f(x)$ è integrabile su $[a,b]$.

Dimostrazione:

$f(x)$ MC su $[a,b] \Rightarrow f(x)$ limitata su $[a,b]$

$P=\{x_0,x_1,\dots,x_n\} \Rightarrow m_k=(f(x_{k-1})) \quad M_k=(f(x_k))$

$\Rightarrow S(P,f)=\sum_{k=1}^{n} M_k(x_k-x_{k-1}) \qquad s(P,f)=\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k-x_{k-1})$

$\Rightarrow \delta(P)=\max\{x_k-x_{k-1} : k\in[1,n]\}$

$\Rightarrow \delta(P)\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))=\delta(P)((f(x_1)-f(x_0))+(f(x_2)-f(x_1))+\dots+(f(x_n)-f(x_{n-1})))$

$\Rightarrow \delta(P)(f(x_n)-f(x_0))=\delta(P)(f(b)-f(a))\ge S(P,f)-s(P,f)$

$\Rightarrow$ ① $\forall\varepsilon>0 \wedge f(b)=f(a) \quad (S(P,f)-s(P,f))<\varepsilon$

② $\forall\varepsilon>0 \wedge f(b)>f(a) \quad S(P,f)-s(P,f)\le\delta(P)(f(b)-f(a))<\varepsilon$ C.V.D.

FUNZIONE PRIMITIVA

Sia $f(x)$ integrabile su $[a,b]$ e sia $x_0\in[a,b]$.

Si dice funzione primitiva di $f(x)$ con punto base x_0 la funzione definita $F_{x_0}(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \quad \forall x\in[a,b]$, cui descrive l'area chiusa da $f(t)$ e l'asse t per un generico punto x rispetto ad x_0.

Ogni tal funzione integrale differisce da un'altra funzione integrale della stessa funzione soltanto di una costante scalare, spesso indicata con la lettera c.

TEOREMA SULLA CONTINUITÀ DELLA PRIMITIVA

Se $f(x)$ è integrabile su $[a,b]$, allora $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ è continua su $[a,b]$.

Dimostrazione:

$\lim_{x\to x_0} F(x)=F(x_0) \quad \forall x_0\in[a,b] \iff \lim_{x\to x_0} F(x)-F(x_0)=0$

$x>x_0 \Rightarrow F(x)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$

$f(x)$ limitata su $[a,b] \Rightarrow m\le f(x)\le M \quad \forall x\in[a,b]$

$\Rightarrow \int_{x_0}^{x} m\,dt \leq \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \leq \int_{x_0}^{x} M\,dt \Rightarrow m(x-x_0) \leq \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \leq M(x-x_0)$

$\Rightarrow m(x-x_0) \leq F(x) - F(x_0) \leq M(x-x_0)$

$\Rightarrow$ Per il T. dei due carabinieri, $F(x) - F(x_0) = 0$. C.V.D.

TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

Sia $f(x)$ continua su $[a,b]$. Allora $\exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$
dove $f(x_0)$ si dice media integrale di $f(x)$ su $[a,b]$.

Dimostrazione:

2023/12/01 ANALISI I

Dimostrazione:

$y_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \qquad m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow m(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx = M(b-a)$

$\Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M \quad \Rightarrow \quad y_0 = \int_a^b f(x)\,dx \cdot \frac{1}{b-a}$

$\Rightarrow \exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = y_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ C.V.D.

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Se $f(x)$ è continua su $[a,b]$, allora $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è derivabile in (a,b) ed $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$.

Dimostrazione:

$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt$

① $x_0 < x \Rightarrow$ Per il T. della media integrale applicata in $[x_0, x]$, $\exists \bar{x} \in [x_0, x]$ tale che $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x f(t)\,dt = f(\bar{x})$. C.V.D.

② $x \to x_0^+ \Rightarrow x_0 \le \bar{x} \le x \Rightarrow f(\bar{x}) \to f(x_0)$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+} f(\bar{x}) = f(x_0)$. C.V.D.

③ $x_0 > x \Rightarrow$ Per il T. della media integrale applicata in $[x, x_0]$, $\exists \bar{x} \in [x, x_0]$ tale che $\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x_0-x}\int_x^{x_0} f(t)\,dt = f(\bar{x})$. C.V.D.

④ $x \to x_0^- \Rightarrow \bar{x} \to x_0 \Rightarrow f(\bar{x}) \to f(x_0)$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0^-} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^-} f(\bar{x}) = f(x_0)$. C.V.D.

TEOREMA CARATTERIZZANTE DELLE PRIMITIVE

Se $G(x)$ ed $H(x)$ sono due primitive della funzione continua $f(x)$ su $[a,b]$, allora $\exists k \in \mathbb{R} : H(x) = G(x) + k \quad \forall x \in [a,b]$.

Dimostrazione:

$g(x) = H(x) - G(x)$ è continua su $[a,b] \Rightarrow g'(x) = H'(x) - G'(x) = 0$

Per il T. caratterizzante le funzioni costanti, $\exists k \in \mathbb{R} : g(x) = k \quad \forall x \in [a,b]$.

$\Rightarrow H(x) = G(x) + k \quad \forall x \in [a,b]$. C.V.D.

TEOREMA FORMULA FONDAMENTALE CALCOLO INTEGRALE

Se $f(x)$ è funzione continua su $[a,b]$ e $G(x)$ è una sua primitiva su $[a,b]$, allora $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$.

Dimostrazione:

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ primitiva $\Rightarrow F(x) = G(x) + k \quad \forall x \in [a,b]$

$0 = \int_a^a f(t)\,dt = G(a) + k \Rightarrow k = -G(a) \Rightarrow \int_a^x f(t)\,dt = G(x) - G(a)$

$\Rightarrow \int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a)$. C.V.D.

2023/12/05 ANALISI I

INTEGRAZIONE DI FUNZIONE RAZIONALE

Per calcolare l'integrale di una funzione razionale del tipo $R(x) = N(x)/D(x)$ dove $N(x)$ e $D(x)$ sono polinomi, osserviamo che possiamo limitarci a considerare il caso in cui grado$(N) <$ grado(D).

Infatti se grado$(N) \geq$ grado(D), allora $N(x)/D(x) = Q(x) + \frac{r(x)}{D(x)}$ dove $Q(x)$ è il quoziente ed $r(x)$ è il resto, quindi grado $r(x) <$ grado(D).

Per il caso grado$(N) <$ grado(D), operiamo una decomposizione in fratti semplici, cioè funzioni razionali della forma $A/(x-x_0)^n \lor Bx+C/(x^2+bx+c)^n$

Se $D(x) = (x-x_1)^{n_1} \cdots (x-x_k)^{n_k}(x^2+b_1x+c_1)^{m_1} \cdots (x^2+b_hx+c_h)^{m_h}$, allora $N(x)/D(x)$ potrà essere decomposto in somme di fratte $A/(x-x_0)^n \lor Bx+C/(x^2+bx+c)^n$.

FORMULA DI HERMITE

In alternativa, possiamo utilizzare la formula di Hermite che afferma

$$\frac{\alpha x+\beta}{(x^2+bx+c)^n} = \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} + \left(\frac{R(x)}{(x^2+bx+c)^{n-1}}\right)' \quad \forall A,B \in \mathbb{R} \land R(x) \text{ polinomio di grado } <2n-2.$$

Allora ...

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+bx+c)^n}\,dx = \int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx + \frac{R(x)}{(x^2+bx+c)^{n-1}}.$$

REGOLE DI INTEGRAZIONE DEFINITA

Valgono le seguenti regole di integrazione per parti e per sostituzione per l'integrale definito ...

① $\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$

② $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

AREA E "LUNGHEZZA"

① $\int_a^b |f(x)|\,dx = \text{Area}(R^+) + |\text{Area}(R^-)|$

② $\int_a^b f(x)\,dx = \text{Area}(R^+) + \text{Area}(R^-) = \text{Area}(R^+) - |\text{Area}(R^-)|$

③ $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx = |\text{Area compresa tra } f(x) \text{ e } g(x)|$

④ $\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = $ Lunghezza di $f(x)$ tra a e b.

ASSIOMA DI COMPLETEZZA DEDEKIND

Se A, B sono sottoinsiemi non-vuoti di $\mathbb{R}$ tali che $a \leq b \; \forall a \in A, \forall b \in B$, allora $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b$, ove c è detto elemento separatore di A e B.

Dimostrazione:

$\exists a_0 \in A, \exists b_0 \in B : a_0 > b_0$ con $a_0 > 0$

$a_0 > 0 \Rightarrow a_0^2 > 0 \Rightarrow a_0^2 > a_0 b_0$

$2 > a_0 b_0 \Rightarrow a_0 b_0 > b_0^2 \Rightarrow a_0 b_0 > 2 \Rightarrow$ assurdo C.V.D.

TEOREMA DI "IN"COMPLETEZZA RAZIONALE

$\nexists c \in \mathbb{Q} : c > 0 \wedge c^2 = 2$

Dimostrazione:

$\exists c \in \mathbb{Q} : c > 0 \wedge c^2 = 2$ $c = m/n$ con $m, n \in \mathbb{N}$ primi, in particolare non pari

$\Rightarrow c^2 = m^2/n^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2 \Rightarrow$ entrambi pari $\Rightarrow$ assurdo C.V.D

TEOREMA DI UNICITÀ DEL MASSIMO

Se essi esistono, max(A) e min(A) sono unici.

Dimostrazione:

$\max(A) = M_1 \vee M_2 \Rightarrow \begin{cases} M_1 \geq a \; \forall a \in A \\ M_1 \in A \end{cases} \cup \begin{cases} M_2 \geq a \; \forall a \in A \\ M_2 \in A \end{cases}$

$\Rightarrow M_1 \geq M_2 \wedge M_1 \leq M_2 \Rightarrow M_1 = M_2$ C.V.D.

TEOREMA DI ESISTENZA DELL'ESTREMO

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è costituito da almeno un elemento, ed è sup. limitato, esso ammette sup(A).

Dimostrazione:

A sup. limitato $B = \{\text{maggioranti di } A\} = \{b \in \mathbb{R} : b \geq a \; \forall a \in A\}$

Per l'assioma di Dedekind, $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \; \forall a \in A, \forall b \in B$

$\Rightarrow$ c è maggiorante di A $\Rightarrow c \in B \Rightarrow$ c minorante di B

$\Rightarrow c = \min(B) = \sup(A)$ C.V.D.

TEOREMA DI PROPRIETÀ ARCHIMEDEA

$\forall x \in \mathbb{R} \; \exists n \in \mathbb{N} : n > x \Rightarrow \mathbb{N}$ non è superiormente limitato

Dimostrazione:

$\exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \; n \leq x_0 \Rightarrow \mathbb{N}$ è superiormente limitato

Per il T. di $\exists$ dell'estremo $\exists \sup(\mathbb{N}) = M \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow M \geq n \; \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow k, k+1, k+2 \in \mathbb{N} \Rightarrow k+1 \leq M \Rightarrow k \leq M-1$

$\Rightarrow M-1$ maggiorante di $\mathbb{N} \Rightarrow M$ non il più piccolo dei maggioranti C.V.D.

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Ogni polinomio in una variabile di grado $n \geq 1$ con coefficienti complessi, del tipo $a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$ ammette ~~almeno una~~ esattamente n radice complessa (o zero).

Ovvero, il campo dei numeri complessi è algebricamente chiuso.

Dimostrazione:

$p(z) \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \qquad f(z) = 1/p(z) = p^{-1}(z)$

$\lim_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{|z| \to +\infty} |f(z)| = 0 \quad \Rightarrow f(z)$ costante $\Rightarrow p(z)$ costante

C.V.D.

TEOREMA DI UNICITÀ DEL LIMITE

Se $f(x)$ ammette limite per $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, allora esso è unico.

Dimostrazione:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \vee \ell_2 \quad$ con $\ell_1 \neq \ell_2 \wedge \ell_1 > \ell_2$

$\Rightarrow 0 < \varepsilon < \frac{\ell_1 - \ell_2}{2} \quad \Rightarrow \quad \ell_2 - \varepsilon < f(x) < \ell_1 + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 2\varepsilon > \ell_2 - \ell_1$

$\Rightarrow \varepsilon > \frac{\ell_2 - \ell_1}{2}$ in contraddizione con $\varepsilon < \frac{\ell_1 - \ell_2}{2}$ C.V.D.

Dimostrazione alternativa:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \vee \ell_2 \quad \ell_1 \neq \ell_2 \wedge \ell_1 > \ell_2$

$\Rightarrow \ell_2 + \varepsilon < \ell_1 - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 0 < \varepsilon < \frac{\ell_1 - \ell_2}{2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\ell_1 - \ell_2}{4}$

$\Rightarrow f(x)$ non è funzione, ma è una relazione! C.V.D.

TEOREMA PONTE

Sia $a_n : \lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$ e $g(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita in $I(\ell) \setminus \{\ell\}$. Allora...

① Se $\ell \in \mathbb{R} \wedge g(x)$ è iniettiva, allora $\lim_{n \to +\infty} g(a_n) = g(\ell)$.

② Se $\ell = \pm\infty \wedge \exists \lim_{x \to \ell} g(x) = m$, allora $\lim_{n \to +\infty} g(a_n) = m$.

TEOREMA DI PERMANENZA DEL SEGNO

Sia $f(x) : I \to \mathbb{R}$ eccetto eventualmente in $x_0 \in I$.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^+$, allora $f(x) > 0 \quad \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Dimostrazione:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^+ \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \ell/2$ per esempio $\Rightarrow 0 < \ell/2 < f(x) < \frac{3}{2}\ell \quad \Rightarrow f(x) > 0$

C.V.D.

TEOREMA REGOLARITÀ DELLE SUCC. MONOTONE

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione monotona, allora essa è regolare.

$\Rightarrow$ Se a_n MC, $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\} \in \overline{\mathbb{R}}$.

$\Rightarrow$ Se a_n MD, $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione:

Sia a_n MC.

① a_n sup. limitata, $\exists \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow a_n \le l < l+\varepsilon \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\forall m,n\in\mathbb{N} \wedge m<n \quad a_m \le a_n \Rightarrow \forall n\ge n_0 \; a_n \ge a_{n_0} > l-\varepsilon$ C.V.D.

② a_n non sup. lim., $\exists \sup(\{a_n : n\in\mathbb{N}\}) = +\infty$

$\Rightarrow \forall M>0$, M non è maggiorante di $\{a_n : n\in\mathbb{N}\}$

$\Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N} : a_{n_0} > M \Rightarrow a_n \ge a_{n_0} > M \quad \forall n\ge n_0$ C.V.D.

TEOREMA CONFRONTO TRA LIM. DI FUNZIONI

Siano f,g,h definite in $I_\delta(x_0)\setminus\{x_0\} : f(x)\le g(x)\le h(x) \quad \forall x\in I_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$

$\Rightarrow$ ① $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = l \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = l$

② $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$

③ $\lim_{x\to x_0} h(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$

TEOREMA CARATTERIZZAZIONE DEGLI INTERVALLI

$\forall I\subseteq\mathbb{R}$ è un intervallo se e solo se $\forall \alpha,\beta\in I$ con $\alpha\le\beta$ si ha che $(\alpha,\beta)\subseteq I$

TEOREMA DI DENSITÀ DEI NUMERI RAZIONALI

$\forall x,y\in\mathbb{R}$ con $x<y$ si ha che $\exists q\in\mathbb{Q} : x<q<y$.

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Se $\{P_n, n\in\mathbb{N}\}$ è una famiglia di proposizioni che dipende da $n\in\mathbb{N}$, verifica ... ① P_1 è vera ② P_k è vera $\Rightarrow P_{k+1}$ è vera $\forall k\in\mathbb{N}$

Dimostrazione:

Sia $A = \{n\in\mathbb{N} : P_n \text{ è vera}\} \subseteq \mathbb{N}$, cioè A è induttivo

$\Rightarrow$ ① $1\in A$ poiché P_1 è vera

② $k\in A \Rightarrow k+1\in A$ poiché $k+1\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow A\subseteq\mathbb{N}$ è induttivo, da P otteniamo $A\equiv\mathbb{N}$, ovvero P_1 è vera $\forall n\in\mathbb{N}$ C.V.D.

TEOREMA SUCCESSIONE CONVERGENTE

Ogni successione convergente è limitata.

Dimostrazione:

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente con $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$.

Per la definizione di limite, per $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - \ell| < 1 \ \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \ell - 1 < a_n < \ell + 1 \quad \forall n \geq n_0$

L'insieme $\{a_n : n \geq n_0\}$ è limitato. L'insieme $\{a_n : n < n_0\}$ è finito.

$\Rightarrow m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in [1, n_0 - 1] \Rightarrow \bar{m} = \min\{\ell - 1; m\} \wedge \bar{M} = \max\{\ell + 1; M\}$

$\Rightarrow \bar{m} \leq a_n \leq \bar{M} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ C.V.D.

TEOREMA CONTINUITA' DELLE FUNZIONI MONOTONE

Se $f(x)$ è MC su $[a,b]$, allora $f(x)$ continua su $[a,b]$ se e solo se $(f[a,b]) = [f(a), f(b)]$

Dimostrazione per assurdo:

$\exists x_0 \in [a,b] : f(x)$ non è continua

$\Rightarrow \ell^- \leq f(x_0) \leq \ell^+$ con $\ell^- \neq f(x_0) \vee \ell^+ \neq f(x_0)$

$\Rightarrow$ Supponiamo $\ell^+ \neq f(x_0) \Rightarrow \forall f(x_0) < y_0 < \ell^+ \ \nexists \bar{x} \in [a,b] : f(\bar{x}) = y_0$

$\Rightarrow$ Per ipotesi, $[f(a), f(b)] = f([a,b]) \Leftrightarrow \forall y \in [f(a), f(b)] \ \exists x \in [a,b] : f(x) = y$

$\Rightarrow$ Contraddizione in quanto $f(\bar{x}) = y_0 \in [f(a), f(b)]$ C.V.D.

TEOREMA LIMITE DI FUNZIONE MONOTONA

Una funzione f monotona su $[a,b]$ ammette limite finito $\forall x_0 \in (a,b)$.

Dimostrazione:

Sia $f(x)$ MC su $[a,b] \Rightarrow \min(f[a,b]) = f(a) \quad \max(f[a,b]) = f(b)$

$\Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a,b] \Rightarrow$ C.V.D. poiché $[a,b]$ è chiuso lim.

T. SUL LIMITE DELLE FUNZIONI M.C.

Sia $f(x)$ def. e MC su I. Allora $\forall x_0 \in I$, ...

1. $\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x_0 < x < b\} = \ell^+ \in \mathbb{R}$
2. $\exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : a < x < x_0\} = \ell^- \in \mathbb{R}$
3. $\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = \inf\{f(x) : a < x < b\} \in \overline{\mathbb{R}}$
4. $\exists \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup\{f(x) : a < x < b\} \in \overline{\mathbb{R}}$

Dimostrazione:

$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in (x_0, b)\} = \ell^+ \in \mathbb{R}$

Per il T. di $\exists$ dell'estremo, $\inf\{f(x) : x \in (x_0, b)\} = \ell^+ \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \ell^+ - \varepsilon < f(x) < \ell^+ + \varepsilon \Rightarrow \forall x \in (x_0, b) \quad f(x) \geq \ell^+ > \ell^+ - \varepsilon$

$\Rightarrow \ell^+ + \varepsilon$ non è un minorante di f su $(x_0, b) \Rightarrow \exists \bar{x} \in (x_0, b) : f(\bar{x}) < \ell^+ + \varepsilon$

$\Rightarrow \forall x \in (x_0, \bar{x}) \quad \ell^+ - \varepsilon < f(x) < \ell^+ + \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ C.V.D.

TEOREMA CARATTERIZZAZIONE SEQ DEL LIMITE

$f(x)$ definita su $I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ $\Rightarrow$ sono equivalenti le proposizioni A e B

[A] $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

[B] $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in I \wedge x_n \neq x_0 \ \forall n \in \mathbb{N} \wedge \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$

Dimostrazione:

Scegliamo il caso $\ell \in \mathbb{R}$

[A] $\Rightarrow$ [B] Dato $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ |x_n - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - \ell| < \varepsilon$

[B] $\Rightarrow$ [A] Per assurdo, se $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq \ell$, allora...

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \delta = \frac{1}{n} \ \exists x_n \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$

$\Rightarrow$ In contraddizione con $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \ell$. C.V.D.

TEOREMA DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA

Se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge, allora converge anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

In tal caso, diremo che a_n converge assolutamente.

Dimostrazione:

Per il criterio del confronto, $-a_n \leq |a_n| \leq a_n \Rightarrow 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n| \ \forall n \in \mathbb{N}$

C.V.D.

TEOREMA DEL CRITERIO DI LEIBNIZ

Se $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \wedge \lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \wedge a_{n+1} \leq a_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ Converge.

Dimostrazione:

$S_{2k} = -a_1 + a_2 - a_3 \dots - a_{2k-1} + a_{2k}$

$S_{2k+1} = -a_1 + a_2 - a_3 \dots + a_{2k} - a_{2k+1}$ con $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow S_1 \leq S_{2k+1} \leq S_{2k} \leq S_2 \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow S_{2k+1}$ MC $\wedge$ S_{2k} MD

Per il T. di regolarità delle successioni monotone, ...

$\ell_p - \ell_d = \lim_{k \to +\infty} S_{2k} - S_{2k+1} = \lim_{k \to +\infty} a_{2k+1} = 0$ C.V.D.

TEOREMA DI ABEL

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge per $x \neq 0$, allora converge assolutamente $\forall x \in (-|r|, |r|)$.

Si dice raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ il valore...

$\rho = \sup \{ |r| : \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge per } x = r \} \in \mathbb{R}^+$.

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

Se $f(x)$ è continua su $[a,b]$ ed $f(a)<0<f(b)$, allora $\exists \bar{x} \in (a,b) : f(\bar{x})=0$.

Dimostrazione:

$a_n < c_n < b_n \quad c_n = \frac{a_n+b_n}{2} \quad \Rightarrow \dots$

① $f(c)=0 \Rightarrow x_0 = c$ C.V.D.

② $f(c)>0 \Rightarrow a_n = a \quad b_n = c \Rightarrow f(a_n)<0<f(b_n)$ e ripeti

③ $f(c)<0 \Rightarrow a_n = c \quad b_n = b \Rightarrow f(a_n)<0<f(b_n)$ e ripeti

Se ① non si verifica dopo ripetizioni di ②,③ , $f(x)$ non è continua. C.V.D

TEOREMA DEI VALORI INTERMEDI

Se $f(x)$ è continua su $[a,b]$, allora $f(x)$ assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$. Ovvero $\forall y_0 \in [f(a), f(b)] \ \exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = y_0$.

Dimostrazione:

$f(a) \leq f(x_0) = y_0 \leq f(b) \Rightarrow \dots$

① $f(a) = y_0 = f(b) \Rightarrow$ C.V.D.

② $f(a) < y_0 < f(b) \ \wedge \ g(x) = f(x) - y_0 \Rightarrow \dots$

$g(x)$ continua su $[a,b] \Rightarrow g(a) = f(a) - y_0 < 0 \ \wedge \ g(b) = f(b) - y_0 > 0$

$\Rightarrow \exists x_0 \in [a,b] : g(x_0) = f(x_0) - y_0 \Rightarrow f(x_0) = y_0$ C.V.D.

TEOREMA DEI DUE CARABINIERI

Date tre successioni $a_n \leq b_n \leq c_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = l \in \mathbb{R}$, allora $\lim_{n\to+\infty} b_n = l \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione:

$l-\varepsilon < a_n < l+\varepsilon \qquad l-\varepsilon < c_n < l+\varepsilon$

$\Rightarrow l-\varepsilon \leq a_n \leq b_n \leq c_n \leq l+\varepsilon \Rightarrow l-\varepsilon < b_n < l+\varepsilon$

$\Rightarrow |b_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$ con $\nu \in \mathbb{N}$ C.V.D.

TEOREMA DI WEIERSTRASS

Se $f(x)$ è continua su $[a,b]$, allora ...

① $f(x)$ è limitata su $[a,b]$

② $\exists \min(f), \max(f)$ su $[a,b]$

③ $f([a,b]) = [\min(f), \max(f)]$.

Dimostrazione:

$M = \sup(f(x) : x \in [a,b]) \Rightarrow \exists x_n : \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = M \Rightarrow \dots$

① $M = \pm\infty \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n : f(x_n) > n \Rightarrow \lim_{n\to\pm\infty} f(x_n) = \infty$

② $M \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n : f(x_n) \leq M \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x_0)$

dove x_0 è il punto in cui $f(x)$ converge se ha massimo limitato. C.V.D

TEOREMA DEL CRITERIO DEL RAPPORTO

Se a_n è una successione a termini positivi tale che $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \mathbb{R}^+$, allora...

① $\ell < 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \wedge \exists n_0 \in \mathbb{N}, b \in (0,1), A>0 : a_n \leq A \cdot b^n \quad \forall n \geq n_0$

② $\ell > 1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \wedge \exists n_0 \in \mathbb{N}, b \in (1,+\infty), A>0 : a_n \geq A \cdot b^n \quad \forall n \geq n_0$

Dimostrazione:

$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n = \ell \in [0,1) \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ell - \varepsilon < a_{n+1}/a_n < \ell + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow a_{n+1} < (\ell+\varepsilon) \cdot a_n \quad \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow a_{n_0+k} < b^k \cdot a_{n_0} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ Per $n > n_0$, $k = n - n_0 \quad a_n = a_{n-n_0+n_0} = a_{n_0+k} \Rightarrow a_{n_0+k} < b^k \cdot a_{n_0}$

$\Rightarrow b^k \cdot a_{n_0} = b^n \cdot \frac{a_{n_0}}{b^{n_0}} = A \cdot b^n \quad \Rightarrow a_{n_0+k} < A \cdot b^n$ C.V.D.

TEOREMA DEL DIFFERENZIALE

Se $f(x)$ è differenziabile in x_0 con $f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + o(x-x_0)$ per $x \to x_0$, allora $f(x)$ è derivabile in x_0 con $f'(x_0) = A$.

Ovvero, l'unico polinomio di grado minore o uguale ad $f(x)$ è $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, detto polinomio di Taylor centrato in x_0.

Dimostrazione:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0)+A(x-x_0)+o(x-x_0)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} A + \frac{o(x-x_0)}{x-x_0} = A$$

$\Rightarrow \exists A = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$ C.V.D.

TEOREMA DI FERMAT

Sia $f(x)$ definita su I e sia $x_0 \in I$ un punto di minimo o massimo relativo per $f(x)$ su I. Se x_0 è interno ad I, $\exists \delta_0 > 0 : I_{\delta_0}(x_0) \subset I$, ed $f(x)$ è derivabile su I, allora $f'(x_0) = 0$, e x_0 sarà chiamato punto stazionario o punto critico.

Dimostrazione:

x_0 punto di massimo $\Rightarrow \exists \delta > 0 : f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I \cap I_{\delta_0}(x_0)$

$\Rightarrow f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I_\delta(x_0) \quad \Rightarrow \exists f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)/x-x_0 \leq 0$ se $x > x_0$

$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)-f(x_0)/x-x_0 \geq 0$ se $x < x_0$

$\Rightarrow$ Per il T. di permanenza del segno, $f'(x_0) = 0$ C.V.D.

TEOREMA DI ROLLE

Se $f(x)$ è continua su $[a,b]$ e derivabile in (a,b) : $f(a)=f(b)$, allora $\exists\, x_0 \in (a,b) : f'(x_0)=0$.

Dimostrazione:

Per il T. di Weierstrass, $\exists\, x_m, x_M \in [a,b] : f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$

$\Rightarrow$ ① $x_m \in (a,b) \vee x_M \in (a,b)$

Per il T. di Fermat, $f'(x_m)=0 \vee f'(x_M)=0$ C.V.D.

$\Rightarrow$ ② $x_m \notin (a,b) \wedge x_M \notin (a,b) \Rightarrow x_m, x_M \in \{a,b\}$

Per il T. di Fermat, $l = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = l \Rightarrow f'(x_0)=0$

C.V.D.

TEOREMA DI LAGRANGE

Se $f(x)$ è continua su $[a,b]$ e derivabile su (a,b), allora $\exists\, x_0 \in (a,b)$: $f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dimostrazione:

$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)$ con $f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ retta per P_a, P_b

$\Rightarrow$ Per il T. di Rolle, $\exists\, x_0 \in (a,b) : g'(x_0)=0$

$\Rightarrow g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow g'(x_0)=0 \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ C.V.D.

TEOREMA DI CAUCHY

Siano $f(x), g(x)$ continue su $[a,b]$ e derivabili in (a,b).

Se $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a,b)$, allora $\exists\, x_0 \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Dimostrazione:

Applica il T. di Rolle su $u(x) = (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a))f(x)$.

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Siano $f(x), g(x)$ continue su $[a,b]$ eccetto eventualmente $x_0 \in (a,b)$. Se $f(x), g(x)$ sono derivabili su $(a,b)\setminus\{x_0\}$ e $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ e $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)\setminus\{x_0\}$ ed $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, allora $\exists \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = l = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Dimostrazione:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \Rightarrow f(x_0) = g(x_0) = 0$

$(x_n) : x_n \in [a,b] \wedge x_n \neq x_0 \ \forall n \in \mathbb{N} \wedge \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$

$\Rightarrow f(x), g(x)$ continue su $[x_0, x_n]$ e derivabili in (x_0, x_n)

$\Rightarrow$ Per il T. di Cauchy, $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\bar{x}_n)}{g'(\bar{x}_n)}$ con $\bar{x}_n \in (x_0, x_n)$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to+\infty}\frac{f'(\bar{x}_n)}{g'(\bar{x}_n)} = l$ C.V.D.

TEOREMA DELLA MEDIA INTEGRALE

Se $f(x)$ è continua su $[a,b]$, allora $\exists\, x_0 \in [a,b] : f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$

dove $f(x_0)$ si dice media integrale di $f(x)$ su $[a,b]$.

Dimostrazione:

$y_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \qquad m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow m(b-a) = \int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx = M(b-a)$

$\Rightarrow m \le \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \le M \quad \Rightarrow y_0 = \int_a^b f(x)\,dx \cdot \frac{1}{b-a}$

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in [a,b] : f(x_0) = y_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ C.V.D.

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Se $f(x)$ è continua su $[a,b]$, allora $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è derivabile in (a,b) ed $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$.

Dimostrazione:

$\frac{F(x) - F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,dt$

① $x_0 < x \Rightarrow$ Per il T. della media integrale in $[x_0, x]$, $\exists\, \bar{x} \in [x_0, x]$

$: \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,dt = f(\bar{x})$. C.V.D.

② $x_0 > x \Rightarrow$ Per il T. della media integrale in $[x, x_0]$, $\exists\, \bar{x} \in [x, x_0]$

$: \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x_0-x} \int_x^{x_0} f(t)\,dt = f(\bar{x})$ C.V.D.

③ $x \to x_0^+ \Rightarrow x_0 \le \bar{x} \le x \Rightarrow f(\bar{x}) \to f(x_0)$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^+} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^+} f(\bar{x}) = f(x_0)$ C.V.D.

④ $x \to x_0^- \Rightarrow f(\bar{x}) \to f(x_0)$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^-} f(\bar{x}) = f(x_0)$ C.V.D.

---

① maggiorante $\Rightarrow k \geq a \quad \forall a \in A$ massimo $\Rightarrow \exists! a_M \in A : a_M \geq a \quad \forall a \in A$

ins. sup. lim. $\Rightarrow \exists b : b > a \quad \forall a \in A$ con $A \subseteq \mathbb{R}$

estremo superiore $\Rightarrow \exists! s \in \mathbb{R} : s \geq a \quad \forall a \in A \wedge \exists a_n : \lim_{n \to +\infty} a_n = s$

T. di esistenza dell'estremo superiore:

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non-vuoto superiormente limitato. Esso ammette $\sup(A)$.

Dimostrazione:

A sup. limitato $\Rightarrow B = \{ b \in \mathbb{R} : b \geq a \quad \forall a \in A \}$

Per l'assioma di Dedekind, $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

$\Rightarrow$ c è il più piccolo dei maggioranti $\Rightarrow c = \sup(A)$ C.V.D.

---

② T. di ~~dell~~ densità dei numeri razionali:

$\forall x, y \in \mathbb{R} : x < y \quad \exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y$

Dimostrazione:

Supponiamo $x < y \wedge x > 0 \quad n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{b-a}$ ~~con n il più piccolo~~

$\Rightarrow n \cdot x < m \quad \Rightarrow m - 1 < nx$

$\Rightarrow nx < m < ny \quad \Rightarrow x < \frac{m}{n} < y$ C.V.D. $q = \frac{m}{n}$

---

③ T. del confronto tra limiti finiti:

Date $f(x) \leq g(x) \leq h(x) : \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l \in \mathbb{R}$. $\forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$,

$\lim_{x \to x_0} g(x) = l \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione:

Per la definizione di limite, $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon \quad l - \varepsilon < h(x) < l + \varepsilon$.

$\Rightarrow l - \varepsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) < l + \varepsilon \quad \Rightarrow l - \varepsilon < g(x) < l + \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} g(x) = l$ C.V.D.

---

④ **T. di regolarità delle successioni monotone:**

Se a_n è una successione monotona, allora essa è regolare.

$\Rightarrow$ Se a_n MC, $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\} \in \overline{\mathbb{R}}$.

$\Rightarrow$ Se a_n MD, $\exists \lim_{n\to+\infty} a_n = \inf\{a_n : n\in\mathbb{N}\} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione:

Supponiamo a_n MC.

① a_n sup. limitata $\Rightarrow \exists \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\} = \ell \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow a_n \leq \ell < \ell+\varepsilon \;\wedge\; a_n$ MC $\Rightarrow a_n \geq a_{n_0} > \ell-\varepsilon \quad \forall n\geq n_0$ C.V.D.

② a_n NON sup. limitata $\Rightarrow \exists \sup\{a_n : n\in\mathbb{N}\} = +\infty$

$\Rightarrow \forall M>0 \quad \exists n_0\in\mathbb{N} : a_{n_0} > M \Rightarrow a_n \geq a_{n_0} > M \quad \forall n\geq n_0$ C.V.D.

---

⑤ **T. del criterio del rapporto per successioni:**

Sia a_n a termini positivi : $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in \mathbb{R}^+$.

① $\ell<1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \;\wedge\; \exists n_0\in\mathbb{N}, b\in(0,1), A>0 : a_n \leq A\cdot b^n \quad \forall n\geq n_0$

② $\ell>1 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \;\wedge\; \exists n_0\in\mathbb{N}, b\in(1,+\infty), A>0 : a_n \geq A\cdot b^n \quad \forall n\geq n_0$

Dimostrazione:

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell \in [0,1) \Rightarrow \ell-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \ell+\varepsilon \quad \forall n\geq n_0$

$\Rightarrow a_{n+1} < (\ell+\varepsilon)\cdot a_n \quad \forall n\geq n_0 \Rightarrow a_{n_0+k} < b^k\cdot a_{n_0} \quad \forall k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow b^k\cdot a_{n_0} = b^n\cdot \frac{a_{n_0}}{b^{n_0}} = A\cdot b^n \Rightarrow a_{n_0+k} < A\cdot b^n$ C.V.D.

---

⑥ **T. di caratterizzazione sequenziale del limite:**

$f(x)$ definita su $I_\delta(x_0)\setminus\{x_0\} \Rightarrow$ [A] $\Leftrightarrow$ [B]

[A] $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

[B] $\forall x_n : x_n\in I \wedge x_n\neq x_0 \;\forall n\in\mathbb{N} \wedge \lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$

Dimostrazione:

[A]$\Rightarrow$[B] $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N} : \forall n\geq n_0 \; |x_n - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_n)-\ell| < \varepsilon$

[B]$\Rightarrow$[A] Per assurdo, se $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq \ell$, allora...

$\forall n\in\mathbb{N} \;\; \delta=\frac{1}{n} \;\; \exists x_n \in I_\delta(x_0)\setminus\{x_0\} \Rightarrow |f(x_n)-\ell| \geq \varepsilon$

$\Rightarrow$ in contraddizione con $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \ell$ C.V.D.

---

⑦ T. di permanenza del segno:

Sia $f(x): I \to \mathbb{R}$ eccetto eventualmente in $x_0 \in I$.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^+$, allora $f(x) > 0 \quad \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$.

Dimostrazione:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$

$\Rightarrow \varepsilon = \frac{l}{2}$ per esempio $\Rightarrow 0 < l/2 < f(x) < \frac{3}{2} l \Rightarrow f(x) > 0$ C.V.D.

---

⑧ T. sul limite di funzioni monotone:

Una funzione f monotona su $[a,b]$ ammette limite finito $\forall x_0 \in (a,b)$.

Dimostrazione:

$f(x)$ MC su $[a,b] \Rightarrow \min(f[a,b]) = f(a) \quad \max(f[a,b]) = f(b)$

$\Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a,b]$ C.V.D. in quanto $[a,b]$ è chiuso limitato.

---

⑨ funzione continua in $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \wedge \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

1^a specie $\Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$ esempio: $f(x) = x/|x|$

2^a specie $\Rightarrow \lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \pm\infty \vee \nexists$ esempio: $f(x) = 1/x-1$

3^a specie $\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = l \neq f(x_0)$ esempio: $f(x) = 1-x^2/x-1$

---

⑩ T. di esistenza degli zeri:

Se $f(x)$ è continua su $[a,b]$ ed $f(a) < 0 < f(b)$, allora $\exists \bar{x} \in (a,b) : f(\bar{x}) = 0$.

Dimostrazione:

$a_n < c_n < b_n \quad c_n = \frac{a_n + b_n}{2} \Rightarrow$

① $f(c) = 0 \Rightarrow x_0 = c$ C.V.D.

② $f(c) > 0 \Rightarrow a_n = a \quad b_n = c \Rightarrow f(a) < 0 < f(b)$ e ripeti

③ $f(c) < 0 \Rightarrow a_n = c \quad b_n = b \Rightarrow f(a) < 0 < f(b)$ e ripeti

Se non si verifica ① f non è continua per il T. dei valori intermedi. C.V.D.

---

(11) **T. dei valori intermedi:**

$f(x)$ continua su $[a,b]$, allora $\forall y_0 \in [f(a), f(b)]\ \exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = y_0$

Dimostrazione:

$f(a) \leq f(x_0) = y_0 \leq f(b) \Rightarrow$

① $f(a) = y_0 = f(b) \Rightarrow$ C.V.D. in quanto $f(x)$ è costante

② $f(a) < y_0 < f(b)$ $\quad g(x) = f(x) - y_0$ continua su $[a,b]$

$\Rightarrow g(a) = f(a) - y_0 < 0 \ \wedge \ g(b) = f(b) - y_0 > 0$

$\Rightarrow$ Per il T. di esistenza degli zeri, $\exists x_0 \in [a,b] : g(x_0) = 0$

$\Rightarrow g(x_0) = f(x_0) - y_0 \quad f(x_0) = y_0$ C.V.D.

---

(12) **T. sulla continuità delle funzioni monotone:**

$f(x)$ ~~continua~~ MC su $[a,b] \Rightarrow f(x)$ continua se e solo se $f[a,b] \equiv [f(a), f(b)]$

Dimostrazione:

$\exists x_0 \in [a,b] : f(x)$ non è continua

$\ell^- \leq f(x) < \ell^+ \quad \ell^- \neq f(x_0) \vee \ell^+ \neq f(x_0)$, Supponiamo $\ell^+ \neq f(x_0)$

$\Rightarrow \forall f(x_0) < y_0 < \ell^+ \quad \nexists \bar{x} \in [a,b] : f(\bar{x}) = y_0$

$\Rightarrow$ Dall'ipotesi, $[f(a), f(b)] = f[a,b] \Rightarrow$ Contraddizione C.V.D.

---

(13) **T. sulla continuità della funzione inversa:**

Se f è continua ed iniettiva, allora anche f^{-1} è continua.

Dimostrazione:

$\delta = \min\{y_0 - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - y_0\}$

$\delta \leq y_0 - f(x_0 - \varepsilon) \qquad \delta \leq f(x_0 + \varepsilon) - y_0$

$\Rightarrow x_0 - \varepsilon \leq f^{-1}(y_0 - \delta) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \delta) \leq x_0 + \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = x_0 = f^{-1}(y_0)$ C.V.D.

---

(14) funzione derivabile $\Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} \frac{df}{dx} = l \in \mathbb{R} \quad \forall x_0 \in Dom(f)$

Per l'interpretazione geometrica, una derivata misura la pendenza del grafico di una funzione in un punto x_0, ovvero il coefficiente angolare della retta tangente nel punto x_0.

---

(15) derivata destra $\Rightarrow \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = l^+$

derivata sinistra $\Rightarrow \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = l^-$

$\} \; l^+ = l^-$

punto angoloso $\Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} f'(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f'(x) \in \mathbb{R}$

punto cuspide $\Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = -\infty \quad \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = +\infty$

punto tg verticale $\Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \pm\infty$

---

(16) $D(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x) + \Delta g) - f(g(x))}{\Delta g} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= \lim_{\Delta g \to 0} \frac{f(g(x) + \Delta g) - f(g(x))}{\Delta g} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \quad \text{C.V.D.}$$

---

(17) massimo relativo $\Rightarrow f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

minimo relativo $\Rightarrow f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in I_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

T. di Fermat:

Sia $f(x)$ definita su I e sia $x_0 \in I$ p.to di minimo o massimo relativo.

Se x_0 è interno ad I ed $f(x)$ è derivabile su I, allora $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione:

x_0 p.to di massimo relativo $\Rightarrow \exists \delta > 0 : f(x_0) \geq f(x) \; \forall x \in I \cap I_\delta(x_0)$

$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{df}{dx} \leq 0$ se $x > x_0$

$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{df}{dx} \geq 0$ se $x < x_0$

Per il T. di permanenza del segno e esistenza degli zeri, $f'(x_0) = 0$ C.V.D.

---

18 **T. di Rolle:**

$f(x)$ continua e derivabile su $[a,b]$: $f(a)=f(b)$, allora $\exists x_0 \in (a,b) : f'(x_0)=0$.

Dimostrazione:

Per il T. di Weierstrass, $\exists x_m, x_M \in [a,b] : f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M)$

$\Rightarrow$ ① x_m, x_M p.ti interni

Per il T. di Fermat, $f'(x_m) = f'(x_M) = 0$

$\Rightarrow$ ② x_m, x_M non p.ti interni $\Rightarrow x_m, x_M \in \{a,b\}$

Per il T. di Fermat, $\ell = f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) = \ell \Rightarrow f'(x_0)=0$ C.V.D.

---

19 **T. di Lagrange:**

$f(x)$ continua e derivabile su $[a,b]$, allora $\exists x_0 \in (a,b) : f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dimostrazione:

$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)$ con $f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ retta per P_a, P_b

Per il T. di Rolle, $\exists x_0 \in (a,b) : g'(x_0) = 0$

$\Rightarrow g'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$ C.V.D.

---

20 Criterio di monotonia:

$f(x)$ continua e derivabile su $[a,b]$, allora ...

$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ MC su $[a,b]$

$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b) \Rightarrow f(x)$ MD su $[a,b]$

Dimostrazione:

① $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \Rightarrow f(x) \leq f(x+h) \quad \forall x \in (a,b)$ C.V.D.

② $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \leq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(x+h) \quad \forall x \in (a,b)$ C.V.D.

---

21 funzione convessa $\Rightarrow f$ sopra la retta tangente in $(x_0, f(x_0)) \ \forall x_0 \in [a,b]$

Geometricamente, f deve stare sopra il segmento congiungente 2 punti del suo grafico.

Criterio di convessità:

$f(x)$ convessa su $[a,b]$ se e solo se $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

---

22 Primo Criterio di convessità:

Se $f(x)$ è convessa, $f'(x)$ è MC.

Dimostrazione:

$f(x) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x-x_1)$ $\quad f(x) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x-x_2)$ $\quad \forall x \in [a,b]$

$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2-x_1)$ $\quad f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1-x_2)$ $\quad x_1 < x_2$

$\Rightarrow (f'(x_2) - f'(x_1)) \cdot (x_2 - x_1) \geq 0$

$\Rightarrow f'(x_2) - f'(x_1) > 0 \Rightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2)$ C.V.D.

---

23 T. di De l'Hôpital:

Siano $f(x), g(x)$ continue su $[a,b]$ e derivabili su $(a,b) \setminus \{x_0\}$.

Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ e $g'(x) \neq 0$ ed $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$,

allora $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione:

$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \Rightarrow f(x_0) = g(x_0) = 0$

$x_n \in [a,b] : x_n \neq x_0 \wedge \lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$

$\Rightarrow f(x), g(x)$ continue e derivabili su $[x_0, x_n]$

Per il T. di Cauchy, $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(\overline{x}_n)}{g'(\overline{x}_n)}$ con $\overline{x}_n \in (x_0, x_n)$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{f'(\overline{x}_n)}{g'(\overline{x}_n)} = \ell$ C.V.D.

---

24 $f(x) = \sum_{0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k + R_n(x)$

Peano $\Rightarrow R_n(x) = f(x) - P_n(x) = o\left[(x-x_0)^n\right]$

Lagrange $\Rightarrow R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$

---

25 Condizione necessaria:

$f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ p.to stazionario per f

Condizione sufficiente:

$f'(x_0) = 0 \wedge f$ derivabile due volte in x_0: $f''(x_0) \neq 0$.

(26) Partizione ⇒ Insieme di sottoinsiemi non-vuoti disgiunti

Somma integrale ⇒ $S = \sum_1^n M_i(x_i - x_{i-1})$ $\quad \underline{S} = \sum_1^n m_i(x_i - x_{i-1})$

Fun. integrabile ⇒ $f(x)$ integrabile se e solo se $S(P) - \underline{S}(P) < \varepsilon$

Integrale di Riemann ⇒ $\lim_{f \to 0} \sum_0^{n-1} f(t_i)(x_{i+1} - x_i) = \int_a^b f(x)\,dx$

---

(27) Criterio di integrabilità:

Sia $f(x)$ limitata su $[a,b]$.

Essa si dice integrabile se e solo se $S(6) = \underline{S}(6)$.

Dimostrazione:

$\underline{S}(6) - S(6) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \underline{S}(6) - S(6) < \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \quad 0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \underline{S}(6) - S(6) < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$ C.V.D.

---

(28) T. di integrabilità delle funzioni monotone:

Una $f(x)$ ~~continua~~ monotona su $[a,b]$ è integrabile secondo Riemann su $[a,b]$.

Dimostrazione:

f limitata, supponiamo $MC \Rightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \forall x \in [a,b]$

D partizione di $[a,b] \quad \Rightarrow \quad \underline{S}(D) - S(D) \leq \frac{b-a}{n}[f(b) - f(a)]$

$\Rightarrow \quad \underline{S}(D) - S(D) \leq \varepsilon$ per un certo $n \geq 1$ C.V.D.

---

(29) T. di continuità della funzione integrale:

Sia f una funzione limitata ed integrabile su $[a,b]$.

Allora la sua primitiva F è continua anch'essa.

Dimostrazione:

$F(x) - F(x_0) = \int_x^{x_0} f(x)\,dx$

f limitata $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{R} \quad |f(x)| \leq K \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow |F(x) - F(x_0)| = \left|\int_x^{x_0} f(x)\,dx\right| \leq K|x - x_0|$ C.V.D.

---

(30) T. della media integrale:

$f(x)$ continua su $[a,b] \Rightarrow \exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$.

Dimostrazione:

$y_0 = 1/b-a \int_a^b f(x)\,dx \qquad m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow m(b-a) = \int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx = M(b-a)$

$\Rightarrow \exists x_0 \in [a,b] : f(x_0) = y_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ C.V.D

---

(31) T. fondamentale del calcolo integrale:

$f(x)$ continua su $[a,b] \Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ derivabile su (a,b)

tale che $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$

Dimostrazione:

$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,dt$ Per la def. di limite...

① $x_0 < x \Rightarrow$ Per il T. della media integrale in $[x_0, x]$, $\exists \bar{x} \in [x_0, x]$

: $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = 1/x-x_0 \int_{x_0}^x f(t)\,dt = f(\bar{x})$ C.V.D.

② $x_0 > x \Rightarrow$ Per il T. della media integrale in $[x, x_0]$, $\exists \bar{x} \in [x, x_0]$

: $\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x_0 - x} \int_x^{x_0} f(t)\,dt = f(\bar{x})$ C.V.D.

---

(32) Funzione primitiva $\Rightarrow F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$

Integrale indef. $\Rightarrow F(x) + c = \int f(x)\,dx \quad \forall x \in [a,b]$

T. di caratterizzazione delle primitive:

Se F è primitiva di f, sarà primitiva anche $F + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$.

Se F, G sono primitive di F, $\exists c \in \mathbb{R} : G = F + c$.

Dimostrazione:

$(F + c)'(x) = F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

$G'(x) = F'(x) = f(x) \Rightarrow G'(x) = F'(x)$

$G(x) - F(x) = H(x) = c \Rightarrow G(x) = F(x) + c$ C.V.D.

---

(33) $\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$

Dimostrazione:

$\int (f \cdot g)'\, dx = \int f' \cdot g + f \cdot g'\, dx = \int f' \cdot g\, dx + \int f \cdot g'\, dx$

$\int (f \cdot g)'\, dx - \int f' \cdot g\, dx = \int f \cdot g'\, dx$

$\int f \cdot g'\, dx = f \cdot g - \int f' g\, dx$ C.V.D.

$\int f(x)\, dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt$

Dimostrazione:

$\int D(F(g(t)))\, dt = \int F'(g(t)) \cdot g'(t)\, dt$

$F(g(t)) = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt \Rightarrow \int f(x)\, dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt$ C.V.D.

---

(34) $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx = A \in \overline{\mathbb{R}}$

convergente $\Rightarrow A \in \mathbb{R}$

divergente $\Rightarrow A = \pm\infty$

oscillante $\Rightarrow \nexists!\, A \in \overline{\mathbb{R}}$

Esempio notevole:

$$\int_0^b \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} \text{converge} & \forall p < 1 \\ \text{diverge} & \forall p \geq 1 \end{cases}$$

---

(35) Criteri di convergenza:

① Siano $f(x), g(x)$ continue su $[a,b]$ tali che $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$

$\int_a^b g(x)\, dx$ convergente $\Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx$ convergente

$\int_a^b f(x)\, dx$ divergente $\Rightarrow \int_a^b g(x)\, dx$ divergente

② Sia $f(x)$ continua su $[a,b]$.

$\int_a^b |f(x)|\, dx$ convergente $\Rightarrow \int_a^b f(x)\, dx$ convergente

---

(36) Criterio del confronto per l'integrale improprio:

Siano $f(x), g(x)$ definite su $[a, +\infty)$ tali che $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty)$.

Secondo la proprietà del confronto, $0 \leq \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx \leq \lim_{b \to +\infty} \int_a^b g(x)dx$.

Dimostrazione:

① $\lim_{b \to +\infty} \int_a^b g(x)\,dx = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx \leq l$ C.V.D.

② $\lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx = +\infty \Rightarrow \lim_{b \to +\infty} \int_a^b g(x)\,dx = +\infty$ C.V.D.

---

(37) Somma parziale $\Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Serie convergenti $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$

Serie divergenti $\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}} = \pm\infty$

Serie indeterminate $\Rightarrow \nexists \lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$

Serie geometrica $\Rightarrow \sum_0^\infty x_k = 1 + x + x^2 + x^3 \dots + x^k$

---

(38) Criteri di convergenza per la successione:

① $\left|\sum_{n+1}^{n+p} a_n\right| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} : \left|\sum_{n+1}^{n+p} a_n\right| < \varepsilon$

② Criterio del confronto

③ Criterio degli infinitesimi : $\lim_{n \to +\infty} n^p \cdot a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$

④ Criterio della radice : $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

---

(39) T. della serie a termini non-negativi:

Una serie a termini non-negativi non può essere indeterminata.

Rimostrazione:

$a_n \geq 0 \qquad S_n \ MC \Rightarrow S_{n+1} \geq S_n$

Per il T. delle successioni monotone, S_n è regolare, ovvero:

$\exists! \lim_{n \to +\infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$ C.V.D.

---

(40) Criterio di confronto fra serie ed integrale:

Sia $f(x)$ una funzione positiva e MD.

Allora, $\sum_1^{\infty} f(n)$, $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ convergono o divergono simultaneamente.

Dimostrazione:

$s_k = \sum_1^k f(n) \qquad \lim_{n \to +\infty} s_k = S \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$

$f(x)$ MD $\Rightarrow f(n+1) \le f(x) \le f(n) \quad \forall x \in [n, n+1]$

$\Rightarrow \int_n^{n+1} f(n+1)\,dx \le \int_n^{n+1} f(x)\,dx \le \int_n^{n+1} f(n)\,dx$

$\Rightarrow \sum f(n+1) \le \int_1^k f(x)\,dx \le \sum f(n)$

$\Rightarrow S - f(1) \le \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \le S \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge se...

converge anche $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{converge} & p > 1 \\ \text{diverge} & p \le 1 \end{cases}$ C.V.D.

---

(41) Criterio del confronto per serie:

Siano a_n, b_n due successioni tali che $0 \le a_n \le b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Allora, $0 \le \sum_1^{\infty} a_k \le \sum_1^{\infty} b_k$.

Dimostrazione:

$u_n = \sum_1^n a_k \qquad t_n = \sum_1^n b_k \qquad \Rightarrow 0 < a_k \le b_k$

$\Rightarrow u_n \le t_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} t_n$

$\Rightarrow 0 \le \lim_{n \to +\infty} u_n \le \lim_{n \to +\infty} t_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ C.V.D.

---

(42) Criterio di Leibniz:

Sia $a_n : a_n \ge 0 \wedge \lim_{n \to +\infty} a_n = 0 \wedge a_{n+1} \le a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Allora, $\sum_1^{+\infty} (-1)^n a_n$ converge.

Dimostrazione:

$s_{2k} = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{2k} \qquad s_{2k+1} = -a_1 + \dots - a_{2k+1} \quad k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow s_1 \le s_{2k+1} \le s_{2k} \le s_2 \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow s_{2k+1}$ MC $\wedge$ s_{2k} MD

Per il T. di regolarità delle successioni monotone, ...

$\lim_{k \to +\infty} s_{2k} - s_{2k+1} = \lim_{k \to +\infty} a_{2k+1} = 0$ C.V.D.

---

(43) Serie di potenze $\Rightarrow \sum_{0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + \dots + a_n(x-c)^n$

Teorema di Abel:

Se $\sum_{0}^{+\infty} a_n x^n$ converge per $x \neq 0$, allora converge assolutamente $\forall x \in (-|r|, |r|)$

Si dice raggio di convergenza di $\sum_{0}^{+\infty} a_n x^n$ il valore...

$\rho = \sup\{|r| : \sum_{0}^{+\infty} a_n x^n$ converge per $x = r\}$.

Proprietà del raggio:

① $r = 0 \Rightarrow a_n$ converge solo nell'origine

② $0 < r < +\infty \Rightarrow a_n$ converge assolutamente su $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$

③ $r = +\infty \Rightarrow a_n$ converge assolutamente

---

(44) **Teorema di D'Alembert**:

Sia $\sum_{0}^{\infty} a_n (x-c)^n \wedge \lim_{n \to +\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$. Allora...

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{se } \ell = +\infty \\ +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ 1/\ell & \text{se } \ell \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

Teorema di Cauchy-Hadamard:

Sia $\sum_{0}^{\infty} a_n (x-c)^n \wedge \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \ell$. Allora...

$$\rho = \begin{cases} 0 & \text{se } \ell = +\infty \\ +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ 1/\ell & \text{se } \ell \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

---

(45) Serie derivata $\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$

Serie integrata $\Rightarrow \int_0^x \sum_{0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt$

Teorema di derivazione ed integrazione delle serie di potenze:

Sia $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ avente raggio di convergenza $\rho > 0$. Allora...

$$\int_0^x \sum_{0}^{\infty} a_n t^n dt = \sum_{0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n dt \qquad \forall |x| < \rho$$

$$D\left(\sum_{0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

---

(46) **T. di sviluppabilità in serie di Taylor:**

Sia $f(x)$ una funzione di classe $C^{\infty}(x_0-\delta, x_0+\delta)$.

Se $\exists M>0 : |f^{(n)}(x)| \leq M \frac{n!}{\delta^n} \quad \forall n \geq 0 \ \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$,

allora $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor con $\rho = \delta$.

---

(47) **T. di esistenza dell'estremo superiore:**

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è costituito da almeno un elemento, ed è sup. limitato, $\exists \sup(A)$.

Dimostrazione:

A sup. lim. $\Rightarrow \exists B = \{b \in \mathbb{R} : b \geq a \ \forall a \in A\}$

Per Dedekind, $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \quad \forall a \in A \ \forall b \in B$

$\Rightarrow c$ è il maggiorante più piccolo di A, poiché $c \leq b \ \forall b \in B$ C.V.D.

---

(48) **T. di proprietà archimedea:**

$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists n \in \mathbb{N} : n > x \Rightarrow \mathbb{N}$ non è superiormente limitato

Dimostrazione:

$\exists x_0 \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \ n \leq x_0 \Rightarrow \mathbb{N}$ è superiormente limitato

Per il T. di $\exists$ dell'estremo, $\exists \sup(\mathbb{N}) = M \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow M \geq n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow M-1 \geq k \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow M-1 = \sup(\mathbb{N})$ C.V.D.

---

(49) Principio di induzione:

Se $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia di proposizioni che dipende da $n \in \mathbb{N}$,

verifica ... ① P_1 è vera ② P_k è vera $\Rightarrow P_{k+1}$ è vera $\forall k \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione:

Sia $A = \{n \in \mathbb{N} : P_n \text{ è vera}\} \subseteq \mathbb{N}$, ove A è induttivo.

① $1 \in A$ poiché P_1 è vera

② $k \in A \Rightarrow (k+1) \in A$

$\Rightarrow A \subseteq \mathbb{N}$ è induttivo $\Rightarrow A \equiv \mathbb{N}$ C.V.D.

---

(50) Forma polare $\Rightarrow$ $z = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$

De Moivre $\Rightarrow$ $z^n = \rho^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$

---

(51) **T. di unicità del limite**:

Se $f(x)$ ammette limite per $x \to x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, allora esso è unico.

Dimostrazione:

$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \vee l_2 \qquad l_1 > l_2$

$l_2 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon \quad \wedge \quad l_1 - \varepsilon < f(x) < l_1 + \varepsilon$

$\Rightarrow \quad l_1 - \varepsilon < f(x) < l_2 + \varepsilon$ solo se $(l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon) \cap (l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \quad \varepsilon > \frac{l_1 - l_2}{2} \quad \Rightarrow$ Violazione di $\forall \varepsilon > 0$ C.V.D.

---

(52) a_n limitata $\qquad b_n$ infinitesimale

$|a_n| \leq M \quad \Rightarrow \quad |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot |b_n| \quad \Rightarrow \quad -M \cdot 0 \leq a_n \cdot b_n \leq M \cdot 0$ C.V.D.

---

(53) **T. successione convergente**:

Ogni successione convergente è limitata.

Dimostrazione:

Sia a_n convergente con $\lim_{n\to+\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$.

Per la definizione di limite, per $\varepsilon = 1$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - l| < 1 \quad \forall n \geq n_0$

$\Rightarrow \quad l - 1 < a_n < l + 1 \quad \forall n \geq n_0 \quad \Rightarrow \quad \{a_n : n < n_0\}$ è finito.

$\Rightarrow \quad m \leq a_n \leq M \qquad \overline{m} = \min\{l-1, m\} \qquad \overline{M} = \max\{l+1; M\}$

$\Rightarrow \quad \overline{m} \leq a_n \leq \overline{M} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$ C.V.D.

---

(55)

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

---

(56) Funzioni trascurabili $\Rightarrow$ $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g = o(f)$ per $x \to x_0$

Proprietà:

$c \cdot o(f) = o(f) \qquad o(c \cdot f) = o(f) \qquad o(f) + o(f) = o(f)$

$o(f) \cdot o(h) = o(hf) \qquad h \cdot o(f) = o(h \cdot f)$

Funzioni asintotiche $\Rightarrow$ $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \sim g(x)$ per $x \to x_0$

(57) Somma $\Rightarrow D(f+g) = f' + g'$

Prodotto $\Rightarrow D(f \cdot g) = f' \cdot g + f \cdot g'$

Quoziente $\Rightarrow D(f/g) = f'g - fg' / g^2$

Dimostrazione:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(f(x+h) \cdot g(x+h)) - (f(x) \cdot g(x))}{h} = \frac{(f(x+h) \cdot g(x+h)) - (f(x) \cdot g(x)) - g(x) \cdot f(x+h) + g(x) \cdot f(x+h)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(x)(f(x+h) - f(x))}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot (g(x+h) - g(x))}{h}$$

$$g(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x) \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$ C.V.D.

---

(58) T. di caratterizzazione delle funzioni costanti:

$f(x)$ è costante su $[a,b]$ se e solo se $f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$

Dimostrazione:

$f(x) = c \Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad f(x+h) = c$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]$ C.V.D.

$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ f'(x) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \forall x > a \begin{cases} f(x) \geq f(a) \\ f(x) \leq f(a) \end{cases} \Rightarrow f(x) = f(a)$

C.V.D.

---

(59) T. della continuità delle funzioni derivabili:

$f(x)$ derivabile $\Rightarrow f(x)$ continua

Dimostrazione:

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow f(x+h) - f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h$

$\Rightarrow \lim_{h \to 0} f(x+h) - f(x) = 0$ C.V.D.

---

(60) Additività $\Rightarrow \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

Linearità $\Rightarrow \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Monotonia $\Rightarrow f(x) \leq g(x) \; \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

---

(61) $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Dimostrazione:

$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

$G(x) - F(x) = k \Rightarrow G(a) = k + \int_a^a f(t)\,dt$

$G(a) = k \Rightarrow G(b) = G(a) + \int_a^b f(t)\,dt$

$\Rightarrow G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\,dt$ C.V.D.

---

(62) $\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$

$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$ ove $dt = g'(x)\,dx$

---

(63) [A] $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t \to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} t^{1-p}$

$p < 1 \Rightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} t^{1-p} = \frac{1}{1-p}$

$p = 1 \Rightarrow \lim_{t \to 0^+} \log(1) - \log(t) = \infty$

$p > 1 \Rightarrow \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{1-p} - \frac{1}{1-p} t^{1-p} = \infty$

[B] $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \int_1^t \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right)$

$p < 1 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = +\infty$

$p > 1 \Rightarrow \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = -\frac{1}{1-p}$ C.V.D.

---

(64) Se f ha segno costante su $[a,b)$, allora la funzione integrale è MC se $f(x) \geq 0$, ovvero $\exists! \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx = A \in \overline{\mathbb{R}}$.

In particolare, $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,+\infty)$ implica che $f(x)$ è discontinua (al massimo) per un numero finito di punti.

---

(65) f continua su $[a,+\infty) \wedge \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge $\wedge \ \exists! \lim_{x \to +\infty} f(x)$

$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 = \ell$

Dimostrazione:

Per assurdo, sia $\ell \neq 0 \Rightarrow \exists M : |f(x)| > M \quad \forall |x| > x_0$

$\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \geq \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{+\infty} M\,dx = +\infty$

C.V.D.

(66) Una serie S_n è convergente se $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$

Dimostrazione:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_{n+1} = 0 \quad \text{poiché} \quad \lim_{n \to +\infty} S_{n+1} - \lim_{n \to +\infty} S_n = S - S = 0$$

C.V.D.

---

(67) vedi (5)

---

(68) T. di criterio della radice:

a_n a termini non-negativi : $\exists! \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$

$l < 1 \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} a_n < +\infty$

$l > 1 \Rightarrow \sum_{1}^{\infty} a_n = +\infty$

Dimostrazione:

$l < 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} < l + \varepsilon \Rightarrow a_n < (l+\varepsilon)^n$ ove $(l+\varepsilon) < 1$

$l > 1 \Rightarrow \forall n > n_0 \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{a_n} > 1 \Rightarrow a_n > 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0$

C.V.D.